学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

数学趣闻集锦

（上）

BOOK

内部资料 非卖品

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，正阔步迈向 21 世纪．

回顾即将过去的世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位．数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志．因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学．现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增。

另一方面，20 世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路．面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步．这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急．尤其是当世纪转折之际，世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作，国际数学联盟（IMU）还专门将 2000 年定为“世界数学年”，其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解”．

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础．随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视．早在 60 年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今．改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力．但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距．我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务．为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的．

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量．丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作．它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采．

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围．为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益．即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的．现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系．

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降．在这样的情况下，上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措．参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行

这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的．

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见．我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功．

让我们举手迎接 2000 世界数学年，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

1997 年 8 月

数学是一种科学，一种语言，一种艺术，一种思维方法．它出现于自然界、艺术、音乐、建筑、历史、科学、文学——其影响遍及于宇宙间的方方面面……

关于作者

数学教师和顾问 T · 帕帕斯于 1966 年在伯克莱取得了加利福尼亚大学的文学士学位，而于 1967 年获斯坦福大学的文学硕士学位．她致力于使数学非神秘化，并帮助人们排除认为数学高不可攀而害怕与之接近的畏惧心理．

除了《数学趣闻集锦（上、下）》外，她还创作了《数学日历》、《儿童数学日历》、《数学 T 恤衫》、《数学知识日读》等通俗读物．此外，她还写有《你看到什么？》（这是一本介绍视幻觉的书）、《数学漫话》、《数学鉴赏》、《大数及其他数学故事》、《分形》、《数学魔术》等著作．

根据大世界出版社 1996 年第 2 版第 15 次印本译出，
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛
数学趣闻集锦（上）
[美]T・帕帕斯著
张远南 张 昶译
上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
（邮政编码：200031）
各地新华书店经销　上海市印刷三厂印刷
开本 850×1156　1/32 印张 8．5 插页 4 字数 202，000
1998 年 12 月第 1 版　1999 年 12 月第 2 次印刷
印数 5，201—8，250 本
ISBN7-5320-6040-3/G・6195 定价：(软精)11.70 元

数学趣闻集锦（上）

十进制的演化

早期的计数形式，并没有位置值系统[1]．约于公元前 1700 年，60 进位制开始出现，这种进制给了米索不达米亚人很大的帮助．米索不达米亚人发展了它，并将它用于他们的 360 天的日历中．今天人们已知的最古老的真正的位置值系统是由古巴比伦人设计的，而这种设计获自幼发拉底河流域人们所用的 60 进制．为了替代所需要写的，从 0 至 59 这六十个符号，他们只用了

两个记号，即用表示 1 ，而用表示 10 ．可以用它们施行复杂的数学计算，只是其中没有设置零的符号，而是在数的左边留下一个空位表示零．

大约在公元前 300 年，一种作为零的符号或开始出现，而且 60 进制也得以广泛发展．在公元后的早些年，希腊人和印度人开始使用十进制，但那时他们依然没有位置的记数法．为了计算，他们利用了字母表上的头十个字母．而后，大约于公元 500 年，印度人发明了十进制的位置记数法．这种记数法放弃了对超过 9 的数采用字母的方法，而统一用头九个符号．大致于公元 825 年左右，阿拉伯数学家阿尔·花拉子米写了一本有关对印度数字仰慕的书．

十进制传到西班牙差不多是 11 世纪的事，当时西阿拉伯数字正值形成．此时的欧洲则处于疑虑和缓慢改变的状态．学者和科学家们对十进制的使用表示沉默，因为它用并不简单的方法表示分数．然而当商人们采用它之后，便逐渐变得流行起来，而且在工作和记录中显示出无比的优越性．后来，大约在 16 世纪，小数也出现了．而小数点，则是 J·纳皮尔于公元 1617 年建议推广的．

或许，将来会有一天，随着我们的需要和计算方法的改变，一个新的系统将替代我们现有的十进制！

[1] ①原注：位置值系统是这样一种数的系统，每个数字所安放的位置，影响和改变该数字的值．例如，在十进制中数 375 中的数字 3，它的值不是 3，而因为它位于百位的位置，所以其值为 300．

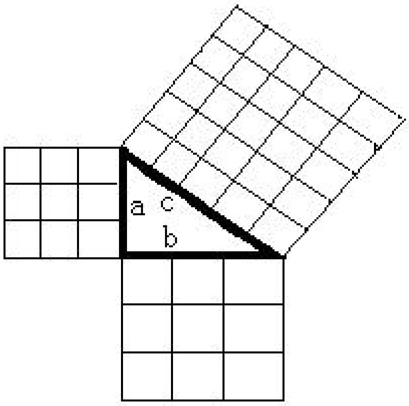
毕达哥拉斯定理

任何一个学过代数或几何的人，都会听到毕达哥拉斯定理．这一著名的定理，在许多数学分支、建筑以及测量等方面，有着广泛的应用．古埃及人用他们对这个定理的知识来构造直角.他们把绳子按 3,4 和 5 单位间隔打结，然后把三段绳子拉直形成一个三角形．他们知道所得三角形最大边所对的角总是一个直角（$3^2+4^2=5^2$）．

毕达哥拉斯定理：

给定一个直角三角形，则该直角三角形斜边的平方，等于同一直角三角形两直角边平方的和．

$$a^2+b^2=c^2$$



反过来也是对的：

如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，则该三角形为直角三角形．

虽然这个定理以后来的希腊数学家毕达哥拉斯（大约公元前 540 年）的名字命名，但有证据表明，该定理的历史可以追溯到毕达哥拉斯之前 1000 年的古巴比伦的汉谟拉比年代．把该定理名字归于毕达哥拉斯，大概是因为他第一个对自己在学校中所写的证明作了记录．毕达哥拉斯定理的结论和它的证明，遍及于世界的各个大洲、各种文化及各个时期．事实上，这一定理的证明之多，是其他任何发现所无法比拟的！

视幻觉与计算机绘图

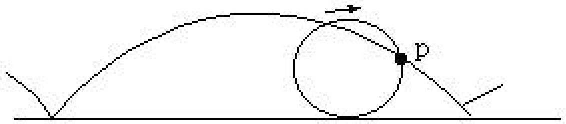
绘图是人们用计算机探索的又一个领地．下图的视幻觉，是用计算机绘制的斯洛德楼梯．

它属于一种振动错觉的范畴．

我们的理解力和悟性受过去的经验和暗示的影响．最初的理解取决于我们观察一个物体的方式．当经过一定时间后，观点便可能发生改变．时间的因素会影响我们的注意力，并很快对最初的视觉焦点感到厌烦．在斯洛德的幻影中，看久了对楼梯的感觉会猝然出现倒置．

摆　线

摆线是数学中众多的迷人曲线之一．它是这样定义的：一个圆沿一直线缓慢地滚动，则圆上一固定点所描出的轨迹称为摆线．



摆线最早可见于公元 1501 年出版的 C·鲍威尔的一本书中．但在 17 世纪，大批卓越的数学家（如伽利略，帕斯卡，托里拆利，笛卡儿，费尔马，伍任，瓦里斯，惠更斯，约翰·伯努里，莱布尼兹，牛顿等等）热心于发现这一曲线的性质．17 世纪是人们对数学力学和数学运动学爱好的年代，这能解释人们为什么对摆线怀有强烈的兴趣．在这一时期，伴随着许多发现，也出现了众多有关发现权的争议，剽窃的指责，以及抹煞他人工作的现象．这样，作为一种结果，摆线被贴上了引发争议的“金苹果”和“几何的海玲”的标签[①]．

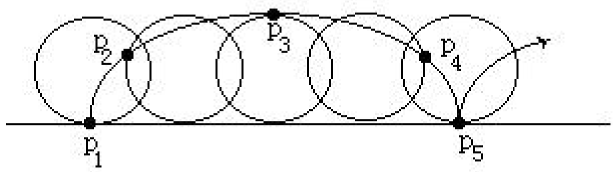
17 世纪，人们发现摆线具有如下性质：

1．它的长度等于旋转圆直径的 4 倍．尤为令人感兴趣的是，它的长度是一个不依赖于π的有理数．

2．在弧线下的面积，是旋转圆面积的三倍．

3．圆上描出摆线的那个点，具有不同的速度——事实上，在 P_5 的地方它甚至是静止的．

4．当弹子从一个摆线形状的容器的不同点放开时，它们会同时到达底部．



图中每个圆代表旋转圆每转四分之一时的位置.注意从 P_1 到 P_2 这四分之一转，要比从 P_2 到 P_3 这四分之一转短得多．结果，从 P_2 到 P_3 点必须加速，以使得在同样长时间内走得更远．

在必须改变方向的地方，如 P_5，点处于静止。

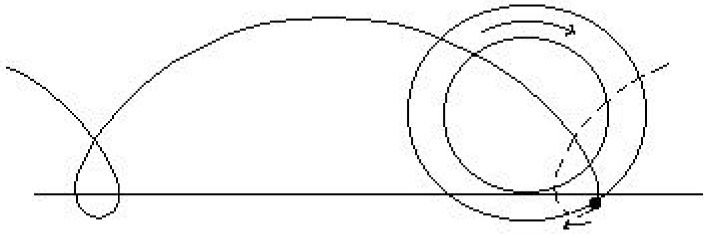
有许多与摆线有连带关系的令人迷惘的悖论．其中火车悖论格外引人关注：

——在任一瞬间，一辆移动的火车绝不可能整个地都朝机车拖动的方向移动．米车上总有一部分是朝火车运动的相反方向移动！

这个悖论能够用摆线加以说明．这里形成的曲线称为长幅摆线——该曲线由旋转轮外沿的固定点描出．下图显示出当火车的车轮向右滚动的时候，它凸出部分外沿的点，却沿长幅摆线的轨迹向左方向（相反的方向）移动．

---

① 译者注：引发争议的“金苹果”和“海玲”都是引自希腊的神话．海玲是 Zeus 与 Leda 之女。因被 Paris 所拐而引起了特洛伊战争，所以有“祸根”之意．这里暗指摆线是引发争议的祸根．

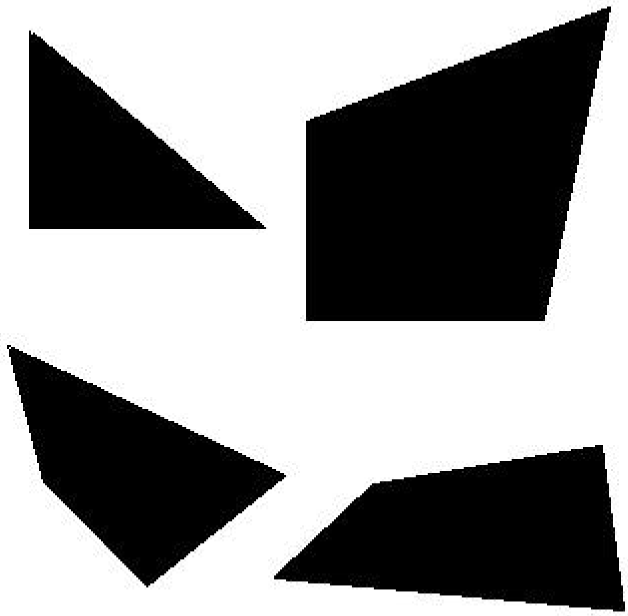


三角形变为正方形

德国数学家大卫·希尔伯特（David Hilbert， 1862—1943）第一个证明了，任何一个多边形都可以通过切为有限块而把它变换为另一个面积相等的多边形．

上述定理可以用著名的英国谜题专家 H·E·杜登尼（HenryErnest Dudeney，1847—1930）的一个谜题加以说明．杜登尼把一个等边三角形通过切为四块，变为一个正方形．

这里有四块，把它们拼在一起，先组成一个等边三角形，然后再组成一个正方形．



哈雷彗星

天体的轨道是这样一种观念：它应能很容易用方程或它们的曲线加以描述．研究曲线图有时能够揭示轨道的循环和周期．

这里提到的哈雷彗星，便是一例．

直至 16 世纪，彗星还是一种无法解释的天文现象．它似乎并不遵从太阳系的哥白尼和开普勒定律．公元 1704 年，E·哈雷对各种彗星的轨道进行了颇有成效的研究．在广为收录的资料中，有不少是关于 1682 年的彗星的．他注意到该彗星的轨道与 1607，1531，1456 等年份的彗星穿过天空的同样的区域．由此他得出结论，它们应是同一个彗星，它绕太阳的轨道呈椭圆形，周期约 75 至 76 年．他成功地预测该彗星应于 1758 年回归．它就是后来变得非常著名的哈雷彗星．新近的研究表明，在公元前 240 年，中国人就已记录到

了哈雷彗星．

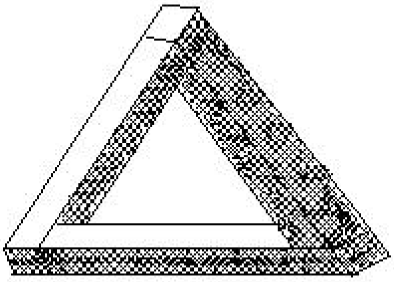
哈雷彗星的每一次出现，其渐渐淡去的彗尾奇观，就像最近 1985—1986 年这一次出现的那样明显．

人们确信，彗星最初是从一些冰体小行星而来．这些冰体小行星绕着太阳，在差不多距太阳 1 至 2 光年的球面上运转．这些小行星是冰块和部分硅酸盐物质微粒的掺合物．在太阳的边缘，处于冰冻的低温，这些小行星绕着太阳以每分钟 3 英里的速度，用 30000000 年的时间绕太阳旋转一周．由于过往其他天体引力的偶然性干扰，使它逐渐落向太阳，并因此改变其圆形的轨道为椭圆形．自从它开始进入太阳的椭圆形轨道，它的部分冰块便开始气化，这就形成了彗尾，它永远指向背离太阳的方向，因为这种尾巴受到太阳风吹拂的缘故．彗尾是气体和少量的微粒的掺合物，它受太阳的照射而发光．彗星在继续运行中如果没有受到木星和土星引力的影响，它将不会改变绕太阳的椭圆形轨道．每一个轨道都带给彗星一次靠近太阳的机会，这时冰融化得更多，从而造成了彗尾的扩展．彗尾使得彗星的尺寸显得更大（一个典型的彗星直径约 10 千米）．在彗星的尾部也漂游着一些陨石，它们最初是嵌在彗星的冰条里的．陨石是彗星分化后在轨道上的残留物．而当它的轨道与地球的轨道巧合时，便造成了流星雨．

不可能的三接棍

许多图案和实例，一旦熟悉起来便觉得当然．在 1958 年英国的《心理学杂志》上，R·朋罗斯发表了他的不可能的三接棍．

他称之为立体的矩形构造：三个直角显示出垂直，但它是不可能存在于空间的．这里三个直角似乎形成一个三角形，但三角形是一个平面而非立体的图形，它的三个角的和为 180°，而非 270°．



新近，朋罗斯推出了一种磁扭线的理论：虽说磁扭是看不见的，但朋罗斯坚信，由于磁扭线之间的互相影响，空间和时间会绞扭在一起．

你能说出为什么海哲的视觉幻影，从数学上讲也是不可能的？

结绳法

印加帝国的领地，是环绕库斯科城的一方地域，那里现在大部分属于秘鲁，还有一部分属于厄瓜多尔和智利．虽然印加人那时还没有一个数学记数系统或一种语言书写法，但他们用结绳的方法，管理着他们长达两千英里的帝国．

结绳法是利用一种十进的位置系统在绳子上打结．在干绳中最远的一行一个结代表 1，次远的一个结代表 10，如此等等．

年间画的秘鲁的结绳法．左下角有一个计算盘，在上面可以用玉米仁来施行计算，而后转换为结绳．在一股绳子上没有结便意味着零．结的尺寸，颜色和形状则记录有关庄稼，产量，租税，人口及其他资料和信息．例如，黄色的绳可用于表示黄金或玉米；又如，在一根表示人口的结绳上，头一套代表男人，第二套代表女人，第三套代表小孩．武器诸如矛、箭、弓等也有着类似的约定．

对于整个印加帝国的帐目，则由一批结绳的记录员来做．这些人过世了，工作由他们的儿子继承．在每一个管理层次都有着相应的记录员，他们各管着某个特定的范畴．

在没有书写记录的年代，结绳法也担负了记载历史的作用．这些历史的结绳，由一些聪明人担任，他们过世了则转给下一代，就像讲故事那样，一代一代地留传了下来．而正是这些原始的计算器——结绳——在他们的记忆库里，系结着印加帝国的信息．

印加的王室道路，从厄瓜多尔到智利，延绵 3500 英里，连接着帝国版图内的各个区域．沿着王室道路由一些职业长跑手传递信息．这些跑手每人负责两英里地段．他们非常熟悉各自道路的细节，因此他们能够以最快的速度日夜地跑．他们接转信息，直至到达要求他们到达的场所．他们服务的项目就是用结绳法联系，以保持印加帝国有关人口的改变，配备，庄稼，领地，可能的反叛，以及其他任何有关的资料．信息每 24 小时更换一次，而且极为精确和切时．

书法、印刷与数学

建筑学、工程学、装潢术和印刷术，是一些几何原理应用的领域．丢勒（Albrecht Dürer）生于 1471 年．卒于 1528 年．在他的一生中，他把自己的几何知识与艺术才华结合在一起，创造出许多艺术形式和艺术方法．他把罗马字母的构造加以系统化，这对于建筑物或碑石上的大写字母的准确和一致，无疑是很根本的．下图显示了丢勒怎样在书写罗马字母中应用几何结构．

今天，计算机科学家们用数学设计了标准的电脑程序，借以产生高质量的印刷和图式．一个突出的例子是，由 Adobe 系统发展而来的 POSTSCRIPT 程序语言，通过激光打印进行工作．

麦粒与棋盘

如果按下述方式在棋盘上放置麦粒，那么共需多少麦粒？

在第一个方格上放一粒麦粒，第二个方格上放两粒，第三

个方格放四粒，第四个方格放八粒，如此等等，每一个新的方格都比先前的方格翻一倍.

（见附录“ 麦粒与棋盘 ” 的解答）

概率与π

数学家和其他科学家总是对π感到兴趣．但当它在《星际旅行》故事中竟挫败一台魔鬼计算机时，便又获得了完全新的崇拜者．π拥有若干桂冠——如它是圆的周长与其直径之比；它是超越数（一个不是整系数代数方程解的数）等等．

千百年来，人们总是试图把π算到小数后越来越多的位数．例如，阿基米德通过增加圆内接多边形边数的方法，近乎准确地得出π的值介于$\frac{31}{7}$与$\frac{310}{7}$之间．

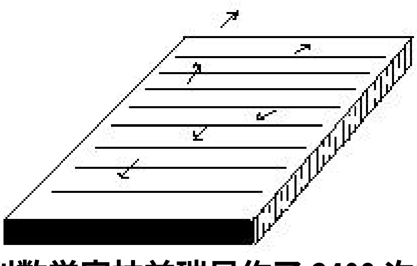
在《圣经》和《编年史》中，π的值给出为 3．埃及数学家求出π的近似值为 3．16．公元 150 年，托勒密给出了π的估值为 3．1416．①

从理论上讲，阿基米德的近似算法可以无限地延伸下去．但随着微积分的发明，希腊人的方法便被舍弃．代之的是使用收敛数列、无穷乘积、连分数等来计算π的近似值，例如：

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\text{O}}}}}}$$

计算π的最为稀奇的方法之一，要数 18 世纪法国的博物学家 C·蒲丰和他的投针实验：在一个平面上，用尺画一组相距为 d 的平行线；一根长度小于 d 的针，扔到画了线的平面上；如果针与线相交，则该次扔出被认为是有利的，否则则是不利的．

蒲丰惊奇地发现：有利的扔出与不利的扔出两者次数的比，是一个包含π的表示式．如果针的长度等于 d，那么有利扔出的概率为 2/π．扔的次数越多，由此能求出越为精确的π的值．



公元 1901 年，意大利数学家拉兹瑞尼作了 3408 次投针，给出π的值为 3．1415929——准确到小数后 6 位．不过，不管拉兹瑞尼是否实际上投过针，他的实验还是受到了美国犹他州奥格登的国立韦伯大学的 L·巴杰的质疑[①]．

在用概率方法计算π值中还要提到的是： R·查特在 1904 年发现，两

[①] 原注：见“对π实验的不实的计算”，J·玛多克，《自然杂志》1994 年 8 月 1 日，370 卷，第 323 页．

个随意写出的数中，互素的概率为$\frac{6}{\pi^2}$.

通过几何、微积分、概率等广泛的范围和渠道发现π，这是着实令人惊讶的！

地震与对数

用数学方式描述自然现象似乎是人类的需要．大概人们希望从中发现一些方法，以便能够控制自然——也许只是通过预报．

就像地震那样，初看起来似乎很难与对数之间有什么关联．但用以测量地震强度大小的方法，却把两者联系起来．美国地震学家 C·F·里兹特，在 1935 年设计了一种里氏震级．那是由地震的震中释放出的能量来描述．里氏震级是释放能量的对数．里氏度数上升 1 级，地震仪曲线的振幅增大 10 倍，而地震能量的释放大约增加 30 倍．例如，一次 5 级地震是一次 4 级地震释放能

量的 30 倍；而一次里氏 8 级地震所释放的能量，差不多是一次里氏 5 级地震的 30^3 即 27000 倍．

里氏震度从 0 到 9 分为十级．但从理论上讲，它并没有上限．大于 4．5 级的地震便会造成损害．强烈地震的震级大于 7.如 1964 年阿拉斯加地震为里氏 8．4 级；而 1906 年旧金山地震为里氏 7．8 级．

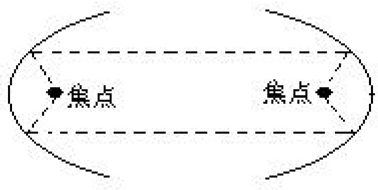
今天，科学家们把对地震的研究，纳入了地震学和地球物理学的领域．精密的仪器和方法被找到或被设计出来．最早的仪器之———地震记录仪一直使用至今．它能自动地发现、测量地震或其他大地震动，并绘制出相关的图表．

美国国会大厦的抛物天花板

在当今的高工艺世界里，去寻找 19 世纪建造的东西，似乎相当有趣．美国国会大厦，以其非电子窃听设计．而符合于这一目的．美国的国会大厦由 W·桑顿博士筹建于公元 1792 年．1814 年为英国侵略军所烧毁，公元 1819 年重建．

在国会山巨大圆顶厅的南面是雕塑厅．该厅的设立是缘于 1864 年，各个州都要求捐献他们的两位著名市民的塑像而得名．直至 1857 年，众议院都与雕塑厅相连．在这个厅里，当时有一位叫阿达姆的议员，发现了一种奇特的声学现象：在厅一边的某个定点，人们能够清楚地听到位于厅的另一边的人的谈话，而所有站在两者之间的人，都听不到他们的声音，他们发出的噪音也并不使传递于大厅间的谈话声变得模糊．阿达姆的桌子正巧坐落在抛物天花板的一个焦点．这样，他便能很容易地窃听到位于另一个焦点的其他国会议员的私人谈话．

抛物反射镜按以下方式作用：



探奇：

——在加利福尼亚的旧金山，有一个为公众设置的抛物声音反射镜．它们设置在一间大房子相对的两边．它们的焦点有标记可以识别．两个人分别在两个焦点作正常的谈话．在房子中不管是否有其他人或其他音响，都不会对他们的彼此倾听造成阻碍！

计算机、计算和电流

电子计算机是应用计算机语言传达信息．计算机语言依次地翻译成某种数制系统，并通过电脉冲驱动计算机．当人们用钢笔或铅笔计算时，十进制显得得心应手，但电子计算机需要的却是另外一种数制系统．如果一种记忆设计是在十进制下运作的，那么它就必须含有十种不同的状态，以表现十个不同的基数（0，1，2，3，4，5，6，7，8，9）．虽然从机械系统讲这是可能的，但对于电学而言，却无法实行．另一方面，二进制系统则完全适应于电子计算机．在二进制中只用两个基数 0 和 1．这两个数很容易通过电流，用以下三种方式表示出来：

（1）由通常开关的开或关状态；

（2）由一个方向或另一个方向去磁化一个线圈；

（3）由激发或不激发一个继电器．

在以上三种情况的任一种中，都可以取其一种状态作为数 0，而另一种状态作为数 1．

计算机不按人们通常方式计数：一，二，三，四，五，六，七，八，九，十，十一，十二，……代替它的是：1，10，101，110，111，……

自计算机用电操作以来，它的机械装置便通过电来转换符号，我们能够通过监测器了解它们的运转．当电流通过计算机的复杂内部时，它使得其中的一部分开关的状态转换．开或关对电来说是仅有的两种可能．这就是为什么它只有 0 和 1 两个数字,以及为什么在我们的电子计算机中要使用二进制．

当我们写一个数的时候，我们用数字 0．1，2，3，4，5，6，7，8，9．这种记数法称为十进制，因为我们用 10 个数字构成任何数．在一个数中，处于某个位置的数字，其真正的值相当于该数字的一个 10 的乘方倍．当我们写数的时候，每一个数字的值，都依赖于它在数中的位置．例如：

5374 并不意味着 5＋3＋7＋4，而是意味着：

5 个千+3 个百+7 个十+4 个一．

在数中，每一个位置是 10 的一个乘方：

千=$1000=10\times10\times10=10^3$

百=$100=10\times10=10^2$

十=$10=10^1$

一=$1=10^0$

而计算机写它们的数只用数字 0 和 1．这种数字系统称为二进制，因为我们只用两个数字构成任何的数．在一个数中，每一个位置的值是一个 2 的乘方．右起第一位是 1 的位置；接着是 2 的位置；再接着是 2×2＝4 的位置；然后是 2×2×2＝8 的位置；如此等等．

$$\overline{2\times2\times2=8\text{的}}\qquad\overline{2\times2=4\text{的}}\qquad\overline{2\text{的}}\qquad\overline{1\text{的}}$$

$$2^3\qquad\qquad 2^2\qquad\qquad 2^1\qquad 2^0$$

于是，数 1101 便意味着：

1×8＋1×4＋0×2＋1×1=十进制下的数 13．

“占地”——一种数学游戏

“占地”是一种有许多可变策略的游戏．玩的人数不限．不过，刚学的时候最好先从两个人开始．游戏一般分为三个阶段：

Ⅰ．构造游戏的区域；

Ⅱ．在一些或全部区域上指定值；

Ⅲ．占领区域．

Ⅰ．每个选手轮流每次各画一个区域，以某种方式邻接在前面已经画过的区域上．每个选手要各画 10 个区域，像图 A 那样．

Ⅱ．各选手选用不同颜色的铅笔，然后一人一区域地轮流指定数值，直至每人所指定的数总和为 100．如果有人希望某区域的指定数为 100，那么他就只能拥有这个区域．

Ⅲ．游戏的目标：

游戏终结，拥有最多区域者胜．至于区域内的指定数则不相干．

游戏的运行：

一个区域被占领，是指与该区域邻接的区域中有至少一个区域属于另一个选手，而后者区域指定数的和大于该区域的指定数．

一个区域一旦被占领，即退出游戏，而且标上占领者的记号．

继续占领（由选手轮流），直至没有可占领为止．

“占地”有一些极为引人的变化．玩的次数多了，便会发现许许多多在构造区域、指定数值和占领区域等方面的策略．

斐波那契数列

斐波那契[①]是中世纪占主导地位的数学家之一，他在算术、代数和几何等方面多有贡献．他生于比萨的列奥纳多家族（1175—1250），是一位意大利海关设在南部非洲布吉亚的官员的儿子．由于他父亲的工作，使他得以游历了东方和阿拉伯的许多城市．而在这些地区，斐波那契熟练地掌握了印度—阿拉伯的十进制系统，该系统具有位置值并使用了零的符号．在那时，意大利仍然使用罗马数字进行计算．斐波那契看到了这种美丽的印度—阿拉伯数字的价值，并积极地提倡使用它们．公元 1202 年，他写了《算盘书》一书，这是一本广博的工具书，其中说明了怎样应用印度—阿拉伯数字，以及如何用它们进行加、减、乘、除计算和解题，此外还对代数和几何进行了进一步的探讨．意大利商人起初不愿意改变老的习惯，后来通过对阿拉伯数字不断地接触，加上斐波那契和其他数学家的工作，终使印度—阿拉伯数字系统得以在欧洲推广，并被缓慢地接受．

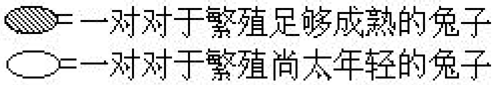
斐波那契数列——1，1，2，3，5，8，13，21，34，…

具有讽刺意味的是：斐波那契在今天的著名，是缘于一个数列．而这个数列则来自他的《算盘书》中一道并不出名的问题．他当时写这道题只是考虑作为一个智力练习．然而，到了 19 世纪，法国数学家 E · 卢卡斯出版了一部四卷本的有关娱乐数学方面的著作时，才把斐波那契的名字，加到该问题的解答和所出现的数列上去．

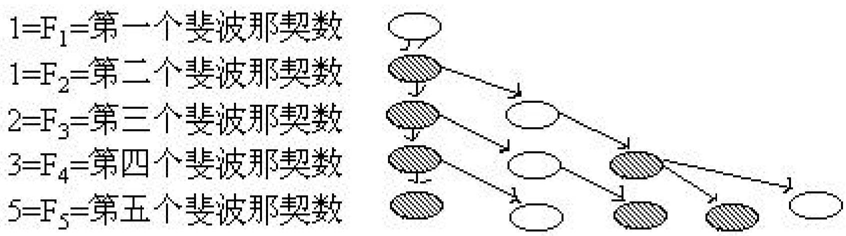
《算盘书》中引致斐波那契数列的问题是：

1）假定一个月大小的一对兔子（雄和雌的），对于繁殖还太年轻，但两个月大小的兔子便足够成熟．又假定从第二个月开始，每一个月它们都繁殖一对新的兔子（雄和雌的）．

2）如果每一对兔子的繁殖都按上面说的同样的方式．试问，从开始起每个月有多少对兔子呢？



兔子的对数



斐波那契数列的每一项，都等于它前两项的和．用公式表示为：

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}.$$

那时，斐波那契并没有去研究这种数列的结果，从而他没有给出任何真正有意义的东西．一直到 19 世纪，当数学家们开始对这个数列感兴趣时，它的性质和它所触及的领域，才开始显现出来．

斐波那契数列出现在：

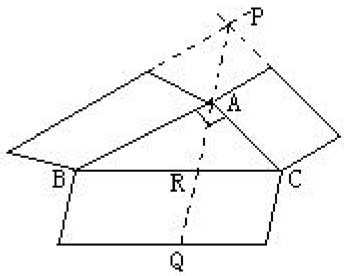
1）帕斯卡三角形，二项展开式和概率．

[①] 原注：“斐波那契”在文字上意为上流社会的儿子．

2）黄金比值和黄金矩形．
3）自然和植物．
4）使人感兴趣的数学戏法．
5）数学恒等式．

毕达哥拉斯定理的变形

亚历山大里亚的帕普斯，是公元前 300 年的一位希腊数学家．他证明了毕达哥拉斯定理的一个有趣变形：将毕达哥拉斯定理中论及的，立于直角边和斜边上的正方形，变形为他自己定理中论及的，立于直角边和斜边上的任意形状的平行四边形．



利用任意的直角三角形并按以下步骤构造：

1）在直角三角形的两直角边上，构造任意大小的平行四边形；

2）延长平行四边形的边，令其相交于 P 点；

3）画射线 PA，令射线与线段 BC 交于 R 点，取|RQ|＝|PA|；

4）以斜边$\overline{BC}$为一边画平行四边形，并使其另一组对边平行且相等于$\overline{RQ}$．

帕普斯的结论：

——立于斜边上平行四边形的面积，等于立于直角边上其他两平行四边形的面积和．

三连环——一个拓扑学模型

如果移走一个环，会出现什么情况呢？

人体结构与黄金分割达·芬奇广泛研究了人类身体的各种比例．下面一张图画的是他对人体的详细研究．而且图中标明了黄金分割[①]的应用．这是一张他为数学家 L·帕西欧里的书《神奇的比例》所作的图解，该书出版于 1509 年．

黄金分割还出现在达·芬奇未完成的作品《圣徒杰罗姆》中．该画约作于公元 1483 年．在作品中，圣徒杰罗姆的像完全位于画上附加上的黄金矩形内．应当认为这不是偶然的巧合，而是达·芬奇有目的地使画像与黄金分割相一致．因为在达·芬奇的著作和思路中，处处表现出对数学应用的强烈兴趣．达·芬奇说过："……没有什么能不通过人类的探求而称之为科学的，除非它是通过数学的解释和证明的途径．"

[①] 原注：术语黄金分割有时也说成黄金均值、黄金比、黄金比例等等．当它设置于一条给定的线段上时，其几何含意如下： 点 B 分割线段 AC 使得（|AC|/|AB|）＝（|AB|／|BC|）．可以确定，该黄

悬链线与抛物线

一根自由悬挂着的链子，形成了一条称之为悬链线的曲线．该曲线看起来很像一条抛物线，以至于伽利略最初竟误信为它就是一条抛物线．

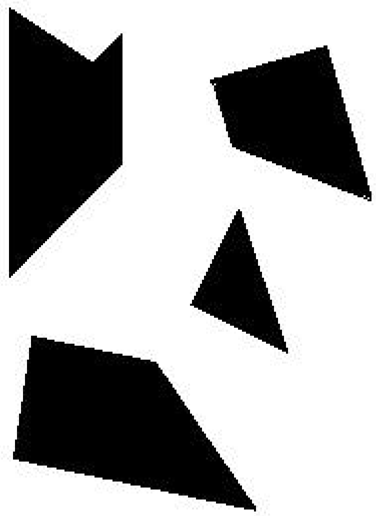
当把重物系在悬链线等间隔的地方，链就变成抛物曲线．这类似于旧金山市的金门湾悬索桥．当在悬缆上安置垂直的吊柱时，便形成了抛物线．

探奇：

——据考证，在旧金山曾有过一个与悬链拱有关的展览．

T 问 题

一个古老但却使人备受挫折的难题是：如何将下列四块板拼合成一个 T 字型[①]？祝你好运！



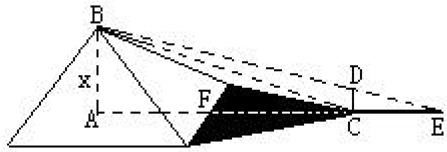
(见附录“T 问题”的解答)

① 译者注：这种智力玩具通称日本四巧板．用这样的四块板可以拼合出许多图案．拼成“T”字较难，拼成如右的“手风琴”式则更难．有兴趣的读者，可见译者的著述《使人聪明的数学智力游戏》一书．

台利斯与大金字塔

台利斯（Thales，公元前 640—546 年）是古希腊著名的七位聪明人之一．是他最早将几何研究引进希腊，人们称之为演绎推理之父．他既是一位数学家，又是一名教师，一名哲学家，一名天文学家，一个精明的商人，而且是第一个采用一步步证实的办法来证明自己结论的几何学家．

公元前 585 年，台利斯正确地预言了当时的日蚀．他还用影子和相似三角形来计算大金字塔的高度，并使埃及人为之惊震！



程序：

——上图显示了金字塔所投下的影子，|DC|是已知竿的长度，它垂直地立于影子的尖端 C．竿的影子的长度|CE|可以测出．|AF|是金字塔边长的 1/2．现在，金字塔的高度 X，可以很容易通过三角形△ABC 与△CDE 的相似计算出来．

$$\frac{x}{|CD|}=\frac{|AC|}{|CE|}$$

于是

$$x=\frac{|CD|\cdot|AC|}{|CE|}$$

无穷旅店

作为一名无穷旅店[①]职员的资格之一，就是具有无穷的知识．保罗的申请被接受，并定于次日傍晚开始工作．

保罗感到奇怪，为什么旅店要求它的所有职员都要知道有关无穷、无限集合及超限数等内容．由于旅社有无穷多个房间，所以保罗用图加以标示，以便客人找到房间不成问题．在工作岗位上度过第一夜后，他为自己具备无穷的知识而感到高兴．

当保罗再次当班时，白天的女职员告诉他，所有的无穷个房间都已客满．女职员走后，进来了一个带有预订单的新的客人．他想了一会，然后便叫每一号房间的旅客，搬到房号比原先高一号的房间去．这样，第一号房终于被腾了出来，新客人就被安排在一号房里．保罗对自己的解决方案颇感满意．不料，此时一部载有无数个新客人的“无限汽车”开到．试问，保罗该怎样给他们安排房间呢？

（见附录“无穷旅店”的解答）

[①] 原注：无穷旅店的设想，首次出自德国数学家大卫·希尔伯特（DavidHilbert，1862—1943）．

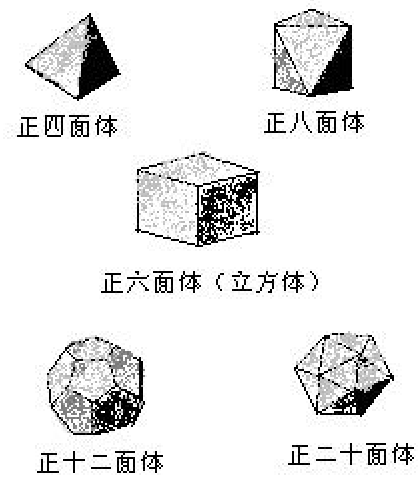
晶体——自然界的多面体

从古代起，多面体便出现在数学著作中，然而，它们的起源却是那样地古老，几乎可以与自然界自身的起源联系在一起．

晶体常常生长成多面体形状．例如，氯酸钠的晶体呈现为立方体和四面体的形状；铬矾晶体有着八面体的形状．令人迷惑不解的是，在一种海洋微生物放射虫类的骨骼结构中，居然也出现十二面体和二十面体的晶状体．

如果多面体是这样的，它的所有面都相等，而且这些面的角也全相等，那么这个多面体就称为正多面体．一个正多面体的所有面都一样，所有边都相等，而所有角也全都相等．多面体有着无数种类型，但正多面体却只有五种．正多面体也称柏拉图体[①]，柏拉图约于公元前 400 年独立发现了它，后人为此予以命名．然而正多面体的存在，人们早在毕达哥拉斯之前就已知道．埃及人甚至把它们中的某些，用在蔚为壮观的建筑和其他物件中．

五种柏拉图体



[①] 原注：见“柏拉图体”一节．

帕斯卡三角形

帕斯卡（Blaise Pascal，1623—1662）是法国著名的数学家．要不是由于宗教信仰，瘦弱的体质，以及无意单单为数学课题而耗尽全部精力，他本来可以成为一名伟大的数学家．帕斯卡的父亲担心他的孩子也像他自己那样嗜好数学[①]，而希望帕斯卡能在更宽阔的教育背景下发展，所以起初劝导他不要学习数学，为的是能够使他引发起其他方面的兴趣．不料帕斯卡在 12 岁小小年纪，便显露出几何方面的天赋，从而使他的数学志向在此后深受鼓舞．他才华横溢，16 岁时便写下了一篇关于圆锥曲线的论文，这使当时的数学家们倍感惊奇．在文章中帕斯卡陈述了后来为人所共知的帕斯卡定理：一条圆锥曲线的内接六边形的三组对边的交点共线．18 岁时，帕斯卡发明了有史以来的第一台计算机．但就在这个时候，他遭受到病魔的侵扰．为此，他向上帝许愿，将停止自己的数学工作．此后三年，他写下了论述帕斯卡三角形及其性质的著作．公元 1654 年 11 月 23 日夜，帕斯卡经历了一场宗教仪式．在仪式上他被要求献身于神学，并放弃数学和科学．此后，除一个短暂的时期外（1658—1659），帕斯卡不再从事数学研究．

一些表面上毫无相关的数学内容，实质上有着深刻的联系．斐波那契数列、牛顿二项展开式和帕斯卡三角形就是一个典型的例子．在这三者之间，存在着相互的联系．下图说明了它们之间的亲密关系：沿着帕斯卡三角形斜向点划线的数累加，便产生斐波那契数列；帕斯卡三角形的每一行，则代表二项式（a＋b）某个特定乘方展开式的系数．

例如：$^{n0}{}_{n}\;^{n1}{}_{n}\;^{n-12}{}_{n}\;^{n-22n}{}_{n}\;^{n}$牛顿二项展开式

[①] 原注：帕斯卡的父亲在数学界也颇具影响．事实上，帕斯卡蚶线与其说是用儿子的名字还不如说是用父亲的名字更为确切．

台球桌的数学

谁能相信，数学知识竟有助于人们玩台球游戏？

给出一张长宽为整数比的台球桌，例如这个比为 7∶5．一个球从一个角落以 45°角击出，在桌子边沿回弹若干次后，最终必将落入角落的一个球囊．事实上，回弹的次数跟台球桌长与宽的最简整数比 m∶n 联系在一起．到达一个角落前的回弹次数，可由以下公式给出：

（m＋n－2）[①]．

上述台球桌回弹的总数为 10．

7＋5－2＝10（次回弹）．

注意在确定球的通路中——等腰直角三角形的结构．

[①] 译者注：原著中“长度+宽度-2”的公式有误，应改为长与宽最简整数比的份额，即 m 和 n．这里已予改正．

电子轨道的几何学

各种各样的几何形状，呈现在物质世界的各个方面．这些形状中有许多是肉眼看不见的．以下特殊的电子轨道所呈现的五边形，便是一个例证．

莫比乌斯带与克莱因瓶

拓扑学专家创造出了许许多多迷人的物体．德国数学家莫比乌斯（Augustus　Mobius，1790—1868）所创造的莫比乌斯带，便是其中之一．

上图所示的带子是由一张纸条的两端粘接而成．纸的一面成为带的内侧，而纸的另一面则成为带的外侧．如果一只蜘蛛想沿着纸带从外侧爬到内侧，那么它非得设法跨越带的边缘不可．

上面这张图所示的是莫比乌斯带，它也是由一张纸条两端粘接而成，不过,在粘接前扭转了一下.现在,所得的纸带已不再具有两面,它只有单面.设想一只蜘蛛开始沿着莫比乌斯带爬，那么它能够爬遍整条带子而无须跨越带的边缘．要证实这一点，只要拿一支铅笔，笔不离纸连续地画线．那么，你将会经过整条的带子，并返回你原先的起点．

莫比乌斯带的另一个有趣的性质，只要你沿着如下图所示的带子中央的虚线剪开便会发现．请你不妨试试，看看究竟会发生些什么！

莫比乌斯带作为汽车风扇或机械设计的传动带，在工业上有着特殊的重要性．它比传统的传动带，在磨损方面，表现得更加均匀．

克莱因瓶也像莫比乌斯带那样令人感兴趣．克莱因（FelixKlein，1849—1925）是一位德国数学家．他设计了一种拓扑模型．这种模型是一种只有单面的特别的瓶子．克莱因瓶只有外部而无内部．它穿过自己．如果往里头注水，那么水恰从同一个洞里溢出．

在莫比乌斯带和克莱因瓶之间有着密切的联系．如果把克莱因瓶沿着它纵长的方向切成两半，那么，它将形成两条莫比乌斯带！

山姆·洛依德谜题

这一谜题是由著名的谜题专家山姆·洛依德创造的．目标是寻找一条走出下图所示的钻石盘的路线．从中心开始，那里出现的是 3．该数表明，你必须从这个数起，或往左、右、上、下，或往对角方向移动三个方格[①]．当你这样做之后，你所停留位置的那另一个数，将告诉你下一步应当移动多少方格（可往八个可能的方向移动）．

祝你好运！

[①] 译者注：这里往八个方向中的哪个方向移动可悉听尊便，但移动的步数要跟格子上的数字相符．游戏目标所要求的“走出钻石盘”是指最后一步恰能位于盘外．这个游戏有一定难度，读者试一试就会明白．

数学与折纸

我们中的大多数人都有过折纸的经历，只是折叠后便收了起来．只有少数人折纸，是为了研究其间所揭示的数学思想．折纸是一项教育与娱乐两者兼备的活动．连 L·卡洛尔也是一位折纸的热心者．虽然折叠纸张超越了许多文化，但日本人却把它作为一种交谊的途径，并通过普及和发展，使之成为一门称之为“折纸”的艺术．

纸张折出的一些数学形体当折叠纸张的时候，很自然地会出现许多几何的概念．诸如：正方形、矩形、直角三角形、全等、对角线、中点、内接、面积、梯形、垂直平分线、毕达哥拉斯定理及其他一些几何和代数概念．

下面是一些折纸的例子，它说明了上述概念的运用．

Ⅰ）从一个矩形式样的纸张，作成一个正方形（下图左）．

Ⅱ）由一张正方形的纸张，变成四个全等的直角三角形（上图右）．

Ⅲ）找出正方形一条边的中点（下图右）．

Ⅳ）在正方形的纸中内接一个正方形（下图左和中）．

Ⅵ）拿一个正方形纸张折叠，使折痕过正方形中心，便会构成两个全等的梯形（下图左）．

Ⅶ）把一个正方形折成两半，那么折痕将成为正方形边的垂直平分线（下图右）．

Ⅷ）证明毕达哥拉斯定理．

如右图折叠正方形纸：

c^2=正方形 ABCD 的面积．

a^2=正方形 FBIM 的面积．

b^2=正方形 AFNO 的面积．

由全等形状相配得：

正方形 FBIM 的面积=△ABK 的面积．

又 AFNO 的面积=BCDAK 的面积（此即正方形 ABCD 除△ABK 外剩余部分的面积）．

这样，$a^2+b^2=c^2$

Ⅸ）证明三角形内角和等于 180°．

取任意形状的三角形，并沿图示的点划线（横的为中位线）折叠．

a°＋b°＋c°=180°——它们形成一条直线．

Ⅹ）通过折切线构造抛物线．

程序：

——在离纸张一边一两英寸的地方，设置抛物线的焦点．如图所示的方法，将纸折 20—30 次．所形成的一系列折痕，便是抛物线的切线，它们整体地勾画出曲线的轮廓．

斐波那契的秘诀

在斐波那契数列中，每一项都由前两项的和产生[①]．任何按上述方法产生的数列，我们称之为类斐波那契数列．

任选两个数，并产生一个类斐波那契数列，使它以你所选的两个数为起始．在你的数列中，头十个数的和，将自动地与第七项的 11 倍相等．

你能对任何两个起始数证明上述结论吗？

（见附录“斐波那契的秘诀”的证明）

[①] 原注：更多的信息可见“斐波那契数列”一节．

数学符号的演化

从早期巴比伦泥板上的楔形文字，可以发现，那时人们把空位充当零．数学家们设计出各种表达概念和运算的符号，其明确的目的是为了节约时间、空间和气力．

在 15 世纪，人们最先使用的加和减符号分别是 p 和 m．这时德国商人用“＋”和“－”的记号，表示重量的增加和差缺．很快地，这“＋”、“－”记号便为数学家们所采用．公元 1481 年之后，这些符号开始广泛出现在人们的手稿上．

乘的符号“×”要归因于 W·奥托（William Oughtred，1574—1660）．但遇到了一些数学家的反对．后者认为，这个记号会跟字母 x 产生混淆．

经常会有这样的情况，对于同一个概念，由于数学家的不同，而出现了许多不同的符号．例如，在 16 世纪，F·韦达（Fran－cois Vieta，1540—1603）先是用一个词，而后又用符号“～”表示相等．笛卡儿则倾向于用“∝”这一符号．但雷科德（RobertRecorde）的符号“＝”（1557），则最终被人们普遍采用．雷科德表示，他选择两条等长的平行线作为等号，是因为它们再相等不过了！

虽然用字母代替未知量，早年古希腊的数学家欧几里得和亚里士多德就曾使用过，但一直没有形成一种共有的习惯．在 16 世纪，像 radix（拉丁语“根”），res（拉丁语“东西”），cosa（意大利语“东西”），coss（德语“东西”）这类的词，都曾被用于作未知数．在 1584—1589 年间，律师韦达出任布列塔尼议会议员．此间他额外地从事了许多数学研究．他发展了用字母表示正的已知或未知量的见解．笛卡儿修订了他的想法，并建议用字母表开头的几个字母作为已知量，而最后的几个字母作为未知量．最后，在 1657 年，J·伍德则把字母用于正数和负数两者．

这个符号是由意在利数学家斐波那契在 1220 年首先使用的，它表示√，大约是出自拉丁词 radix，意即根，今天我们所用符号$\sqrt{\ }$是来自16世纪德国。

德国数学家 C·鲁道夫在 1525 年用它作为立方根的符号，$\sqrt[3]{\ }$则来自17世纪的法国。

17 世纪德国数学家莱尼兹选择它作为乘法的符号。

这个倒反的 D 字是用于表示除法，它是由法国人 J·E·伽利玛德于 1700 年采用的。

1859 年，一位哈佛大学教授 B·佩尔斯用这个符号表示π。π而这个符号最早出现在 18 世纪的英格兰。

这个符号由意大利文艺复兴时期的数学家塔塔尼亚用作为加法。它是由意大利词（添加）而来。

这个符号古希腊数学家丢番图用于表示减法。

∞曾被罗马人用来表示 1000，而后来用于表示任意的非常大的数．公元 1665 年，一位牛津大学的教授约翰·威廉第一次用这个符号表示无限．但该符号直至 1713 年贝努利使用它之后，才被广为采纳．

其他符号的演化是这样的：括号用于 1544 年；中括号[ ]和大括号{ } 用于 1593 年．根号则是由笛卡儿所设计（他用$\sqrt{c}$表示立方根）．

人们很难想象，没有“＋”、“0”等符号，及其他人们认定的记号，我们怎么去从事数学问题的研究．同样地，实现这种几个世纪的演化而能为人们所普遍接受，也是极为艰难的！

数学符号和用语的过去和现在比较表

达 · 芬奇的一些几何设训

这是达 · 芬奇的手稿，表明他在一个教堂的设计中用了正多边形，达 · 芬奇对几何结构的兴趣和研究，以及他对于对称的知识，成为他创造和设计建筑物的工具．在大教堂边增添一个小教堂，并没有打乱原计划以及主建筑物的对称性．

十个历史日期

下面是用不同的数的系统写出的十个历史日期．每一个都是用十进制写的，并与某历史事件发生的年份相关联．

下面是不同的数的系统表，它能够帮助你破译上面所写的数字．

拿破仑定理

“ 数学的进步和完善与国家的兴旺是密切关连的．”

——拿破仑一世

波拿巴 · 拿破仑（Napoleon Bonaparte，1769—1821）对数学和数学家怀有特别的敬意，并且欣赏他自己提出的问题．事实上，以下定理即归属于他：

——以任意三角形的三条边为边，向外构造三个等边三角形，则这三个等边三角形的外接圆中心恰为另一个等边三角形的顶点．

卡洛尔——数学家

道奇森（Charles LutwidgeDodgson，1832—1898）是一位英国数学家和逻辑学家，但他的笔名 L·卡洛尔，以及作为《阿丽丝漫游奇境记》和《阿丽丝穿越镜子》等书的作者，则更加知名．此外，他还出版了许多涉及多种数学领域的书籍．他的书《枕边问题》中的 72 道题，几乎全是在他夜里睡醒后写下并解出的，其内容论及算术、代数、几何、三角、解析几何、微积分和抽象的概率．

“相反地，”两个雷同人继续说道，“如果它是这样，那么它就能；而如果它将这样，那么它就将能；但如果它不是这样，那它就不能．这就是逻辑．”

——L·卡洛尔

《一个迷惘的故事》最初是作为一本月刊杂志的文章刊印的，而后编辑成令人喜爱的数学谜题故事，共含十章．据说当初维多利亚女王十分看重卡洛尔的有关阿丽丝的书，并要他将所写的每一本书派人送给她．可想而知，当女王收到一大堆数学的书时是何等地惊讶！

《枕边问题》的第 8 题

“一些人坐成一圈，于是每个人便有两个相邻的人；而每人身上有一定数目的先令．第一个人比第二个人多一先令，第二个人又比第三个人多一先令，如此等等．现第一个人给第二个人一先令，第二个人给第三个人两先令，如此等等，总之每个人给出的先令数都比他收到的先令数多一，而且尽可能地这样做下去．最后，有两个相邻的人，其中一人拥有的先令数是另一人先令数的 4 倍．试问，总共有多少个人？开头钱最少的那个人身上有多少先令？”

（见附录“枕边问题之八”的解答）

这是卡洛尔在他 20 岁时画的迷宫。他把迷宫的通道画得纵横交错．目标是要让人找出一条走出迷宫中心的通路．

在手指上计算

在中世纪，纸作为书写的材料价格较为昂贵，那时人们经常用手指记号来传递计算的结果和信息．下图所示的手指系统同时能够表达小的数和大的数．

卷缠的莫比乌斯带

下图包含了莫比乌斯带的运用．如果你按图中的拓扑构造做出纸的模型，并沿着图中的点划线把它们剪开，那么其中一个将变成一个正方形，而另一个则形成两个套着的环．

海伦定理

许多人学习如何计算一个三角形面积时，用的是它的高及与之相对的底的长度．然而，如果没有海伦定理，只知道三角形三条边的长度而要求它的面积，就需要三角学的知识．

海伦因下列公式而在数学上青史留名：

$$三角形面积=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

这里，a，b 和 c 是三角形三边的长度，而 s 是三角形三边长度和的一半．

海伦公式的出现已知要早于阿基米德，后者或许证明了它，不过目前所知的最早的书面记录出自海伦写的《测量》一书．将海伦描述为一位非正统数学家的典型是最为合适的．他对数学的实用性，比对数学作为科学与艺术的理论与学说更为注重．正因为如此，他同样由于诸如原始类型蒸汽机的发明，各种各样的玩具，抽水救火机，一种塔门一开便立即点燃祭坛圣火的装置，一种风琴，以及许多基于流体性质和简单机械定律的机械设计而被后人记住．

哥德式建筑一瞥

这些珍贵的哥德式设计方案显示了几何和对称在米兰的圆顶式建筑中的应用．该方案发表于公元 1521 年，由米兰圆顶建筑大师 C·卡沙里洛设计．

纳皮尔骨算筹

带有复杂计算的工作变得越来越乏味，特别是科学家们进行的天文计算，海员们在实际航海中所要解决的定位问题，以及商人们在让利时的考虑等等．然而，在 17 世纪，一位著名的苏格兰数学家 J·纳皮尔（John Napier，1550—1617），以他发明的对数引发了一场计算上的革命（一种用代表数的方法把进行乘法和除法的计算变换为加法和减法的计算）[①]．纳皮尔用对数和表来计算的方法，使得诸如乘、除、乘方、开方这类困难的计算，变得简单化起来．

虽然对数和指数函数的理论是数学的精髓部分，然而一旦现代电子计算器和计算机介入生活，对数表和它的使用就像过时的法律那样被废弃了．但对数表的发展及其快捷的计算法，曾在几个世纪内为数学家、会计师、航海家、天文学家和科学家们所广泛应用．

应用对数，纳皮尔还发明了一种算筹，称为纳皮尔骨算筹，它可以帮助商人们算账．商人们带一套象牙或木制的算筹，用来进行乘、除及求平方根和立方根等运算．每根算筹都是它顶部数字的乘法表．例如要算 298×7，先将 2，9，8 三根算筹依次摆成一线，然后从上往下数到第 7 行，则如图所示的两数和即为所求的积．

[①] 原注：例如，进行的运算是 3600／0．072，首先用对数表把这些数变换为它们的代表数（即对数）形式，即把要运算的数写为同底的指数形式，而实行除法即化为指数间的简单减法．这就是把 3600 与 0．072 两数的对数相减，再用同样这张对数表把结果变为十进制下的数．

艺术与投影几何

多少世纪以来，数学总是有意识或无意识地影响着艺术和艺术家．投影几何；黄金分割；比例；比；视觉幻影；对称；几何形状；图案和花样；极限和无限；以及计算机科学等等，这些都是数学范围的内容，然而它们却影响着艺术的众多方面乃至于整个时代——原始的、古典的、文艺复兴时期的、近代的、流行的或艺术装饰的．

一位油画家要在一张画布上画出一幅立体的场景，他必须确定当眼光从不同的距离和位置观察时，物体会产生怎样的改变．这便是文艺复兴时期艺术活动的主要部分和投影几何发展的领域．投影几何是这样一种数学领地，它论及图形及其投影的空间关系和性质——因此它包含了透视法的问题．为了创作他们的现实主义的立体油画，文艺复兴时期的艺术家们利用了新建立的投影几何概念——投影点、平行会聚线、消失点，等等．

投影几何是最早的一门非欧几何．艺术家们希望描实，他们推断，假如人们透过窗户去观察一个景观，并且眼睛保持在一个焦点上，这时视点集中，外面的景观似乎是投影到窗户上而被看到，这样窗户便可能充当画布那样的幕．各种各样的图案赋予了艺术家们创造的灵感，他们把这种现实从窗户转移到画布上来．下图所示的两个图案，乃是 A · 丢勒的木刻．请读者注意，艺术家的眼睛处在一个固定的点．

无穷与圆

每个圆都有一个固定的周长——一个有限量的长度．一种获得圆周长公式的方法，就是利用无穷的概念．研究圆内接正多边形（所有的边具有相同的尺寸，所有的角具有相同的度数）的周长序列．通过计算我们发现，随着多边形边数的增加，它的周长也就越来越接近圆的周长．事实上，当边数趋于无限时这种周长的极限便是圆的周长．下图说明，当一个多边形的边数增大时，它的边更加贴近于圆，而多边形本身也更加形似于圆．

令人惊奇的跑道

如下图，取两个大小任意的同心圆组成一个圆环形的跑道．你能说出为什么该跑道的面积会相等于这样一个圆的面积，这个圆的直径既是大圆的弦而又切于小圆？

波斯人的马与洛依德谜题

这是 17 世纪波斯人画的精巧的“ 四马 ”图画．你能找出这四匹马吗？

下面这张“ 骑师和驴子 ”的画，可能是谜题大师山姆 · 洛依德（Sam Loyd，1841—1911）的灵感．按洛依德所说，大约在 1858 年前后，当他还是一个少年时便创造了它．

所要提的问题是：沿着点划线把图切割为三个矩形，重新组合这些矩形但不允许折叠它们，使得它显现出两个骑师正骑着两只飞跑的驴子．

该谜题立即获得了成功．事实上它是那样地流行，以致于山姆 · 洛依德在几个星期内竟为此而赚了 10000 美元．（见附录“ 山姆 · 洛依德的驴 ”的解答）

弓　形

弓形一词源于拉丁词 lunar（月形）．弓形是由两个不同的圆弧所围成的平面区域（见图中状如娥眉的部分）．巧斯岛的希波克拉底（公元前 460—公元前 380 年）——读者不要将他与可斯岛的那位同名的医生，希波克拉底誓约的作者相混淆——对弓形进行了广泛的研究．他大概相信这种图形可以用来解决化圆为方问题[①]．

他发现并证明了：

在内接于一个半圆的三角形的边上，如图作两个弓形，则两弓形的面积和等于三角形的面积．

即：若 $\widehat{ABC}$， $\widehat{AEB}$， $\widehat{BFC}$ 是半圆，

则

弓形（1）面积+弓形（2）面积=三角形 ABC 面积．

证　明

$$\frac{\text{半}\odot\widehat{AEB}\text{面积}}{\text{半}\odot\widehat{ABC}\text{面积}}=\frac{\frac{1}{8}\pi|AB|^2}{\frac{1}{8}\pi|AC|^2}=\frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

$$\text{半}\odot\widehat{AEB}\text{面积}=\text{半}\odot\widehat{ABC}\text{面积}\cdot\frac{|AB|^2}{|AC|^2}\qquad \text{—— ①}$$

类似地

$$\text{半}\odot\widehat{BFC}\text{面积}=\text{半}\odot\widehat{ABC}\text{面积}\cdot\frac{|BC|^2}{|AC|^2}\qquad \text{—— ②}$$

现将①，②两式相加并提取因式得：

$$\text{半}\odot\widehat{AEB}\text{面积}+\text{半}\odot\widehat{BFC}\text{面积}=$$

$$\text{半}\odot\widehat{ABC}\text{面积}\cdot\frac{(|AB|^2+|BC|^2)}{|AC|^2}\qquad \text{—— ③}$$

△ABC 是一个直角三角形（因为它内接于⊙），

这样 $|AB|^2=|AC|^2$（毕达哥拉斯定理）将它代入③得：

$$\text{半}\odot\widehat{AEB}\text{面积}+\text{半}\odot\widehat{BFC}\text{面积}=\text{半}\odot\widehat{ABC}\text{面积}$$

$$\underline{-)\ \text{面积}(3)+\text{面积}(4)=\text{面积}(3)+\text{面积}(4)}$$

$$\text{最终得}\quad\text{弓形}(1)+\text{弓形}(2)\text{面积}=\triangle ABC\text{面积}$$

尽管希波克拉底对于解决化圆为方问题上的努力没有获得成功，然而他的探索却有助于他发现许多新的重要的数学思路．

[①] 原注：见“三大不可能的作图问题”一节．

自然界中的六角形

自然界创造出了许多像正方形和圆这样美丽的模型．正六边形则是在自然界中发现的又一种几何形体．六边形具有六条边．如果它所有的边都相等，所有的角大小也一样，那么这样的六边形便是正六边形．

数学家们表明，只有正六边形、正方形和等边三角形三种正多边形能够镶嵌平面，使得没有剩余的空隙．

在上述三者中，当它们面积相等时正六边形有最小的周长．这意味着，在建造蜂巢中为了获得同样的空间，蜜蜂把小窝建成正六边形所用的蜂蜡较少，所做的工作也较少．六边形的形状不仅可以在蜂巢中找到，而且可以在雪花、分子、晶体、海洋生物等其他形式中找到．

如果你在一阵飞雪中漫步，那么你会感到自己位于某些奇异的几何形状之中．雪花是自然界中六角形对称的最为令人兴奋的一种例子．雪花在形成的过程中多少存在一些瑕疵．一朵雪花则是由无数这样的六角形花样结合而成，这就解释了为什么世界上没有两朵雪花是相像的[①]．

[①] 原注：设于科罗拉多州博德市的国家大气探测中心的 N·C·克奈特发现了世界上第一组相同的雪花．它们是在 1986 年 11 月 1 日收集到的．

10^{100}与$10^{10^{100}}$

英语中有个表示大数的新词叫 googol，一个 googol 是 1 后面跟 100 个零，即 10^{100}．googol 这个字是数学科普作家 E·卡斯纳博士的九岁的外甥造的．他的外甥还提出了另一个比 googol 更大的数，叫做 googolplex．他把这个数描述为 1 后面跟许多零，零的个数则是尽你可能写到手累为止．googolplex 的数学定义是 1 后面跟有 googol 个零，即 $10^{googol}=10^{10^{100}}$．

使用大数：

1）如果整个宇宙充满了电子和质子而没有留下多余的空间，那么这些粒子的总数为 10^{110} ．这是一个大于 googol 但远小于 googolplex 的数．

2）科尼岛（位于美国纽约州——译者注）的沙粒数大约为 10^{20}．

3）从公元 1456 年古腾堡印刷第一部《圣经》开始，到 1940 年为止，全世界所有印刷的词量约为 10^{16}．

一个幻立方

这是由头 27 个自然数组成的 3×3×3 的幻立方，它的每一行或每一列的三个数的和均为 42．①

① 译者注：这里所说的幻立方不考虑各剖面对角线上的三数和．实际上幻立方的严格定义应该是：用 1 至 n3 的自然数，填入 n3 个小立方体，使得立方体的每一个剖面正方形上的每行，每列，每条对角线，以及立方体的四条对角线上各自的 n 个数的和都等于定数．实际上幻立方的构造是很困难的．已经证明 3 阶，4 阶的幻立方不存在．5 阶，6 阶幻立方是否存在，至今人们尚不清楚．7 阶幻立方已经有人做出．8 阶幻立方诞生于 1970 年，其作者还是一位中学生哩！

分形——真实还是想象？

多少世纪以来，人们总是用欧几里得几何的对象和概念（诸如点、线、平面、空间、正方形、圆、……）来描述我们这个生存的世界．而非欧几何的发现，引进了描画宇宙现象的新的对象．分形就是这样一种对象．

分形的思想初见于公元 1875 至 1925 年数学家们的著作．这些对象被贴上畸形怪物的标签，人们深信它没有丝毫的科学价值．它就是今天人们众所周知的分形．分形一词是曼德勃罗于 1975 年创造的，曼德勃罗在该领域有着广泛的发现．

雪花曲线[①]是一个分形的例子,它是在现有等边三角形的边上加上等边三角形而形成的．

从严格意义上讲，分形是这样一种对象，将其细微部分放大后，其结构看起来仍与原先的一样．这与圆形成了鲜明的对比，把圆的一部分放大后便变得比较平直．分形可分为两类：一是几何分形，它不断地重复同一种花样图案；另一种是随机分形．计算机和计算机绘图能够把这些“畸形怪物”可靠地带回到生活中，在计算机的屏幕上，几乎能够立即产生分形，并显示出它们奇妙的形状、艺术图案或细微的景观．

可能有人感到，只有欧几里得几何的正规形状才能应用在科学中，然而上述新的形式却从不同的透视角度向我们提供了认识自然的观点．分形是一个新的数学领域——有时也把它归为自然界的几何，因为这些奇异而混饨的形状，不仅描绘了诸如地震、树、树枝、生姜根、海岸线等自然现象，而且在天文、经济、气象、电影制片等方面也有广泛应用．

皮亚诺曲线是又一个分形的例子，还是一条充满空间的曲线．在一个空间充满曲线是指在给定范围内的每一个点都被曲线经过，随曲线的描绘整个空间逐渐变黑．图例是一个不完全的痕迹．

[①] 原注：更多的信息见“雪花曲线”一节．

十亿分之一秒——在计算机上测量时间

一个电脉冲在十亿分之一秒[①]里行进了 8 英寸.光在十亿分之一秒里掠过了一英尺．今天的计算机每秒钟能运算百万次．

让我们感受一下一台大型计算机能够以多快的速度进行工作，假定我们考虑的时间为半秒．在半秒时间内计算机能够执行以下任务：

1）将 200 张支票登入 300 个不同的银行帐目中；
2）检查 100 个病人的心电图；
3）对 3000 张试卷 150000 个答案计算得分，并评价每个问题的效度；
4）为一个公司的 1000 名雇员计算工资；
5）还有多余的时间可做其他工作．

这是一个令人吃惊的想法：想象一台计算机如果由光驱动，那不是比由电驱动更快吗？在想象的光控计算机中，需要采用什么样的数制系统？是否要基于光谱中颜色的数目？或许光的其他性质？

[①] 译者注：十亿分之一秒也叫“纳秒”（ns）．103 纳秒=1 微秒（μs），103 微秒=1 毫秒（ms），103 毫秒=1 秒（s）．比纳秒更小的时间单位依次为皮（pico）秒，飞（femto）秒和阿（atto）秒．各缩小 103 倍．

达·芬奇的短程式圆顶

达·芬奇对许多研究的领域以及它们之间的相互联系都怀有浓厚的兴趣．数学就是其中之一，他常把数学的许多概念用于他的艺术、他的建筑设计和他的创造发明．下图是他草拟的短程式圆顶[①]的复制件．

① 译者注：这里所提到的短程式圆顶是指圆顶建筑的框架呈如图所示的短程线式的结构．

幻　方

多少世纪来人们对幻方总是怀着浓厚的兴趣．从古代起幻方就跟某些超自然和魔术的领域相联系．在古代亚洲的城市，人们在考古挖掘中发现了它们．有关幻方的最早记录，是约于公元前 2200 年在中国出现的“洛书”．传说这个幻方最初是大禹[①]在黄河岸边的一只神龟的背上看到的．

在西方世界最早提到幻方的是公元 130 年伊士麦（现称士麦那，土耳其西部的一个港口城市——译者）的勒恩的著作．公元 9 世纪，幻方在占星学领域逐渐蔓延，阿拉伯占星家用它们来占星和算命．最后，大约公元 1300 年，通过希腊数学家莫斯切普罗的著作，幻方及其性质被传播到西半球（特别在文艺复兴时期）．

幻方的一些性质：

幻方的阶数是由幻方的行或列的数目来规定的．例如右图的幻方阶数为 3，因为它有 3 行．

幻方的“幻”在于它具有令人迷惑的性质．其中一些性质如下：

1）每行、每列及对角线上数的和为同一个数，这个数即变幻常数，能够通过以下方法之一获得：

a）取幻方的阶数为 n，求 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ 的值，这里幻方是由自然数 1，2，3，…，n^2 构成的．

b)取任意大小的幻方并从左上角开始,沿着每一行依次写下连续的数.则每条对角线上数的和即为变幻常数．

2）任意两个与中心等距离的数（在同一行，同一列，或同一条对角线）互补．一个幻方的数互补是指它们的和是同样的，而且都等于该幻方最大数与最小数的和．

把已有的幻方变换为另一个幻方的方法：

3）把一个幻方的每一个数同时加上或乘以任一确定的数，所得的依然是一个幻方．

4）如果把与中心等距离的两行及两列交换，所得结果还是幻方．

5）a）在一个偶数阶幻方里交换两个象限，所得结果仍为幻方．

b）在一个奇数阶的幻方里交换适当的象限和行，所得结

果仍为幻方．

关于幻方的论述比其他娱乐数学的课题都要多．B·富兰克林（Benjamin Franklin）花了很多时间用在设计幻方上．构造 5 阶幻方具有相当的挑战性（即用头 25 个自然数组成 5×5 方阵，使得每行、每列和每条对角线上数的和是同样的）．行数和列数为奇数的幻方称奇数阶幻方；如果行数和列数是

[①] 译者注：大禹是我国中古代部落联盟的领袖．据记载，他曾领导人民疏通江河，兴修沟渠，治水有功．

偶数则为偶数阶幻方．偶数阶幻方的一般性构造方法人们仍在探求．但另一方面，却已有不少的方法可以构造任意大小的奇数阶幻方．其中劳伯尔（La Loubere）发明的楼梯法，在幻方热心者中最为知名．上图说明了如何用这种方法构造一个 3×3 幻方．

楼梯法：

1）从位于顶行中央的小方格的数字 1 开始．

2）下一个数放在位于右上对角的小方格里，除非该格已被占据．如果下一个数落在幻方所在框架外头想象的小方格里，那就必须在你的幻方中找出安放它的位置，这个位置在你的幻方中与想象的方格处于对等的部位．

3）如果你的幻方中，原拟放下一个数（右上角）的小格已被占据，则可以直接将此数写在原数下面的小格内．例如图示中的数 4 和 7．

4）继续（2）和（3）的步骤，直到幻方剩下的数都各得其所．

现在我们尝试用楼梯法来构造 5×5 幻方（用头 25 个自然数）．检验一下方法中那些使得幻方改变的环节，看看它们是怎样运作的．楼梯法

（对于 3×3 幻方）

用你所构造的任何一个幻方，将它的每一个数都乘一个你所选择的常数，所得的结果仍是幻方吗？

对于偶数阶幻方而言，有许多方法是为特殊的偶数而设计的．

例如：对角线方法只用于 4×4 幻方．

作法：

由自然方阵（一个按行依次写下连续数的方阵）开始．如果某数位于对角线上，则必须与它的互补数交换位置．

用一个 4×4 的幻方，通过适当的行或者列的交换，使得结果仍是幻方．如果适当交换象限，结果也还会是幻方．

如果你能设计出构造其他偶数阶幻方的方法，那么或许你也能发现对所有偶数阶幻方都适用的一般性方法[①]．同样你也有望找到或设计出构造任意奇数阶幻方的其他方法．

[①] 原注：许多人花了大量的时间和精力去寻找偶数阶幻方的一般性构造法．H·瑟楚克、N·杰西等人声称自己已经设计出了一种制造偶数阶幻方的方法．

一个特殊的“幻”方

斐波那契数列为 1，1，2，3，5，8，13，…，其中的每一项都是前两项的和（从第三项起）．当用斐波那契数 3，5，8，13，21，34，55，89，144 依次替换三阶幻方中的数 1，2，3，4，5，6，7，8，9 时，会形成一个新的方阵．这一方阵虽然不具有幻方通常的性质，但它 3 个行的乘积的和（9078＋9240＋9360＝27678）等于 3 个列的乘积的和（9256＋9072＋9350＝27678）．

中国三角形

数学具有普遍性．历史表明数学的发现和应用并不局限于单一的地区，帕斯卡三角形的中国图式就是一个例子．虽然帕斯卡对他的数的三角形作过一些有意义的发现，但同样的三角形却早在帕斯卡诞生前 302 年[①]（约公元 1303 年）就已出现在中国刊印的书本上！

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . . . .

[①] 原注：见“帕斯卡三角形”一节．

阿基米德的死

西那库斯[1]的阿基米德（Archimedes，公元前 287—公元前 212 年）是亚历山大大帝之后三百年间在希腊居主导地位的数学家．

在公元前 214 至公元前 212 年的第二次罗马与迦太基的战争期间，西那库斯为罗马军队所包围．这时阿基米德发明了许多机巧的防卫武器（如石弩、将罗马战舰提起并撞碎的拖钩、使战舰起火的抛物形镜，等等），有效地抵挡了罗马军队近三年．虽然西那库斯终因弹尽粮绝而落入罗马人之手，但罗马统帅马塞拉斯下令不许伤害阿基米德．然而，一个罗马士兵进入了阿基米德的家，发现他还在为一道数学问题而苦苦思索，完全无视于他的出现．士兵命令他停止工作，但阿基米德没有予以理会，盛怒之下，士兵用剑刺进了阿基米德的胸膛．

[1] 译者注：西那库斯是意大利西西里岛东南部的一个海港，公元前 734 年迦太基人建立的一座古城．

一个非欧世界

19 世纪是一个在政治上、艺术上和科学上有着革命思想的时代，数学也一样，这时非欧几何得到了发展．非欧几何的发现标志着现代数学的起始，如同印象派油画标志着现代艺术的起始一样．

在此期间，双曲几何（非欧几何之一）由俄国数学家罗巴切夫斯基（Nicolai Lobachevsky，1793—1856）和匈牙利数学家 J·波约伊（Johann Bolyai，1802—1860）分别独立地发现．

可以发现，双曲几何也像其他非欧几何一样，描述着与欧氏几何不相协调的性质．例如，在双曲几何中线未必暗指是直的，而平行线也不保持等距离（它们不相交而保持着渐近的关系）．人们在详细研究了非欧几何后发现，它确实能够对宇宙现象给出更为精确的描述．从而，这些几何能够为描述不同的世界而存在．

法国数学家庞加莱（Henri Poincaré，1854—1912）创造了一个这样的世界．他想象宇宙被囿限于一个圆内（对于三维模型则可形象化为一个球体），其中心温度为绝对零度．当人们从中心出发旅行，周围温度上升，但这个宇宙中的物体和居民并不晓得温度在改变．今设想每件东西的大小也随着移动而改变，即每个物体和生命在接近中心时变大而在接近边界时依比例缩小，而且他自身并不晓得，也不可能发觉自己的大小变化．这意味着一个人的步伐当他向边界移动时，将变得越来越小，从而将出现这样的情形，即只能逼近于边界而无法到达于它．这种现象使得这个世界显示为无限，而此间两点间最短的距离是一条弯曲的线，如果我们沿着这条弧状线从 A 到 B 移动，则所需的步伐最少．

上图就是这样一个世界，在这个世界里三角形的边由弧线组成，就像图中三角形 ABC 那样．平行线也以新的面目出现，线 DCE 与线 AB 平行，因为它们没有交点．

实际上庞加莱的宇宙能够描述我们生活着的世界．如果我们考虑自身在宇宙中的位置，而且我们能够进行用光年来度量的距离的旅行，那么也许我们能够发现自己身体尺寸的改变．事实上根据爱因斯坦的相对论，当速度接近光速时尺子的长度变短！

庞加莱是一位具有创见性的思想家．在巴黎大学文理学院当教授期间（1881—1912 年），他所开设学科的多样性说明了这一点．他的著作和思想覆盖了诸如电学、势论、水力学、热力学、概率、天体力学、发散数列、渐近展开、积分不变量、轨道的稳定性、天体的形成等等科目．他的著作可以说在一定程度上激励了 20 世纪的数学思想．

炮弹与金字塔

平方数、金字塔数以及它们累加的和数，可以用来确定一个底为正方形的金字塔内炮弹的数量．

试研究以上各数的图样．

在下图中有多少炮弹呢？

尼科梅德斯蚌线

在探索某些数学问题的解答时常常会引发新的概念和发现．古代著名的三大作图问题——三等分角问题（即把给定角分为相等的三部分），倍立方问题（即作一个立方体使它的体积两倍于给定立方体的体积）及化圆为方问题（即作一个正方形使它的面积等于给定圆的面积）——刺激了数学的思考，结果许多想法在解决这些问题的努力中被发现．虽然最终表明这古代三大作图问题不可能只用圆规和直尺作出，但却找到了解决它们的其他办法，蚌线就是其中之一蚌线是一种历史悠久的曲线，它是由尼科梅德斯（约公元前 200 年）首先发现并用于倍立方问题和三等分角问题的．

构造一条蚌线要从一条直线 L 和一点 P 开始．过 P 画射线与 L 相交．在每条这样的射线上，以 L 为界向外截出一段固定的长度 a 并取点．那么这些点轨迹便形成蚌线．

蚌线的弯曲程度依赖于 a 与 b 之间的关系．即 a＝b，a＜b 或 a＞b．蚌线的极坐标方程是：

$$r=a+b\cdot\sec\theta.$$

三等分已知角∠P 可采取如下办法：取∠P 为直角三角形△QPR 的一个锐角．以 P 为极点，QR 为固定线 L 画一条蚌线，使得它由 L 向外截出的固定长度等于斜边长|PR|的两倍 2h．在 R 点作 RS⊥QR 并交蚌线于 S 点．现∠QPT 即为∠QPR 的三分之一（T 为 PS 与 QR 的交点）．

证明：

令 M 为 TS 的中点，则|RM|＝h，这是因为△SRT 为直角三角形，其斜边中点到各顶点等距离．

现因|MS|＝|MR|＝h，所以∠1＝∠2＝k°．而∠3 是△SMR 的一个外角，从而∠3＝2k°．又因|MR|＝|PR|＝h，又有∠3＝∠4＝2k°．

∵PQ 与 RS 共面，且同垂直于 QR，

∴PQ∥RS．

∵∠2＝∠5＝k°．

这样一来，QPR = 3k° 而 $\frac{1}{3}\angle QPR = k° = \angle 5$

由此，∠QPR 被三等分．

三叶形结

系一个结对大多数人来说只是一种常规的过程，从我们能够自由地系结自己的鞋带开始便是这样．当然，系结也是一种艺术，特别当你看到一名水手为小船装上索具的时候，尤其会有这种感觉．然而结的题材也是拓扑学领域中的一种数学观念．结本身也形成了一个相关的新的领地．其中最重要的思想是证明了下述深远的结论，即一个结不可能在多于三维的情况下存在．

作一个三叶形结

下面说明了三叶形结的形成：拿一张长纸条将它扭转 3 个半圈，并用胶带将其端头连接在一起，再用剪刀沿着纸带的中线剪开，结果你将得到一条有着三叶形结的带．

富兰克林的幻方

变化多端是富兰克林幻方的特色，除具有一般幻方的通常性质[①]外，它还另有许多奇异的特性．例如，它的每一行总和为 260，而每半行的和为 130；向上的阴影线上的四个数与对称的向下的阴影线上的四个数（可接长）的总和为 260；任何四个与中心等距离且位于各象限对等位置的四个数的和为 130；各象限内四个角与四个中心数的总和为 260；任何构成小的 2×2 方块的四个数的和为 130；等等．

[①] 原注：见“幻方”一节．

无理数与毕达哥拉斯定理

无理数是这样的数，它不能表示为一个有限的或循环的小数．

例如

$\sqrt{2}$；$\sqrt{3}$；$\sqrt{5}$；π；$\sqrt{48}$；e；$\sqrt{235}$；φ；…

当人们力图把一个无理数写为小数时，得到的将是一个无限不循环的小数．

例如

$\sqrt{2}\approx 1.41421356\cdots$

$\sqrt{235}\approx 15.3297097\cdots$

$\pi\approx 3.141592653\cdots$

$e\approx 2.71828182\cdots$

$\phi\approx 1.61803398\cdots$（黄金比值）

几千年来，数学家们设计出许多方法以便获得无理数更为精确的近似值．用高功率计算机和无穷数列，可以将这些近似小数求到任何精密的程度．当然，在设计这些方法时要考虑到所耗费的时间及效果．令人惊奇的是，对于许多无理数，用毕达哥拉斯定理可以将其准确地求出．古希腊数学家不仅证明了华达哥拉斯定理[①]，而且还用它作出了一些长度为无理数（与单位长相比）的精确的线段．

在数轴上确定$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$，…的位置，作直角三角形使它以上述数的长度为斜边，并如下图所示用圆规画弧将其定位于数轴上．

[①] 原注：见“毕达哥拉斯定理”一节．要注意的是：π和 e 不能只用直尺和圆规作出，因为它们除了是无理数以外还是超越数．

素　数

一个大于 1 的自然数，如果只有 1 和它自身作为因子，这样的数就是素数．

1978 年 10 月 30 日下午 9 时，上述的数被发现，它成为那时最大的已知素数．这个素数可写为 $2^{21701}-1$，它是 L·尼克尔和 C·诺尔（两人均系中学生）在计算机上运作了 1800 小时后发现的．接着 C·诺尔又独自发现了一个更大的素数 $2^{23209}-1$．1979 年 5 月利物浦实验室的 H·尼尔森发现了一个比诺尔大得多的素数 $2^{44497}-1$[①]．

虽然今天的计算机已经有了探寻素数的程序，但古希腊数学家埃拉托斯散（Eratosthenes，公元前 275—公元前 194）却早已发明了求比某给定数小的素数的筛法技巧．下图圆圈内的数是小于 100 的素数．

埃拉托斯散筛

程序：

1）划掉 1，因为它不归于素数类．

2）圈起 2，这是最小的正的偶素数．现在划掉所有 2 的倍数．

3）圈起 3，即下一个素数．现在划掉所有 3 的倍数．可能其中有些已作为 2 的倍数被划掉．

4）圈起下一个未被划掉的数，即 5．现在划掉所有 6 的倍数．

5）继续上述过程，直至 100 之内的所有数要么被圈起，要么被划掉．

[①] 译者注：后来数学家们又发现了许多更大的素数．1983 年为 286243-1，1985 年为 2216091-1，1991 年为 2756839-1．1998 年 1 月，迄今为止最大的素数被发现，它是 23021377-1，共有 909526 位．

黄金矩形

黄金矩形是一种非常美丽和令人兴奋的数学对象，其拓展远远超出了数学的范围，可见于艺术、建筑、自然界，甚至于广告．它的普及性并非偶然，心理学测试表明，在矩形中黄金矩形最为令人赏心悦目．

公元前 5 世纪的古希腊建筑师已经晓得这种协调性的影响．巴特农神殿就是应用黄金矩形的一个早期建筑的例子．那时的古希腊人已经具有黄金均值及如何作它的知识,还知道如何近似于它以及如何用它来构造黄金矩形.黄金均值φ（phi）的读音，与古希腊著名雕塑家菲狄亚斯（Phidias）名字的头三个字母相同想来并非只是巧合．相信菲狄亚斯在他的作品中用了黄金均值和黄金矩形．既然毕达哥拉斯所处的那个社会能够选择五角星作为等级的一种记号，那么用φ表示黄金均值也就很难说与菲狄亚斯没有一点关系．

除了影响建筑之外，黄金矩形还出现在艺术中．在公元 1509 年 L·帕西欧里的《神奇的比例》一书中,达 ·芬奇为人体结构中的黄金均值作了图解.黄金均值用在艺术上是以生动的对称技巧为标志．A·丢勒、G·西雷特、P·曼诸利安、达·芬奇、S·达利、G·贝娄等人，都在他们的一些作品中用黄金矩形去创造富有生气的对称．

从几何意义上讲，在给定线段 AC 上黄金均值[①]可以这样构成，在 AC 上取一点 B，使得

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|AB|}{|BC|}$$

A　　　B　　C

则|AB|为黄金均值，也以黄金分割、黄金比以及黄金比例等著称．

一条线段一旦分割出黄金均值，那么黄金矩形也就很容易通过以下步骤作出：

1）给定任一线段 AC，用 B 点将线段 AC 分割出一个黄金均值段，作正方形 ABED．

2）作 CF⊥AC．

3）延长射线 DE，使得线 DE 与 CF 交于 F 点．

则 ADN 是一个黄金矩形．

黄金矩形也可以不用已有的黄金均值段作出，如下图所示：

1）作任意正方形 ABCD．

2）用线段 MN 将正方形平分为两半．

3）用圆规，以 N 为中心，以|CN|为半径作弧．

4）延长射线 AB 直至与以上的弧相交于 E 点．

5）延长射线 DC．

6）作线段 EF⊥AE，并令射线 DC 与 EF 交于 F 点．

则 ADFE 为一黄金矩形．

黄金矩形还能自我产生：从下面的黄金矩形 ABCD 出发，很容易通过画正

---

① 原注 :确定黄金比值,人们必须解方程： 这里|AB|＝x,|AC|＝1,而|BC|＝1－x.黄金比|AC|/|AB|或|AB|/|BC|

方形 ABEF 的方法得到黄金矩形 ECDF．再通过画正方形 ECGH，容易构成黄金矩形 DGHF．这样的过程可以无限地继续下去．

用最后得到的无穷多个紧挨着的黄金矩形，可以作出另一种类型的等角螺线（也称对数螺线）．如下图用圆规在一系列黄金矩形中的各个正方形里，画四分之一圆弧．这些弧便形成等角螺线的轮廓．

注释

由黄金矩形陆续产生其他的黄金矩形,这样便画出了等角螺线的轮廓.图中的对角线交点为该螺线的极点或中心．

令 O 为螺线的中心．

螺线的极半径是指以中心 O 和螺线上任意点为端点的线段．

注意螺线上的每一个点的切线与该点的极半径都形成一个角$\angle T_1P_1O$．如果对于每一个这样的角都相等，则该螺线为等角螺线。

等角螺线也称对数螺线，因为它以几何比率（也就是某数的方幂）增长，而方幂的指数则是对数的另一种名称。

等角螺线是仅有的这样一种类型的螺线，这种螺线当它增大时不改变自己的形状．

在实际生活中有许多装点的形式——正方形、六角形、圆、三角形等等.黄金矩形和等角螺线是其中最令人心旷神怡的两种．两者的形迹可见于海星、贝壳、菊石、鹦鹉螺、序状种子的排列、松果、菠萝、甚至于一个蛋的形状．

同样令人感兴趣的是黄金比与斐波那契数列的联系．斐波那契数列——（1，1，2，3，5，8，13，…，[F_{n-1}+F_{n-2}]，…）——相继项比的极限，即为黄金均值φ．

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\Lambda,\frac{F_{n+1}}{F_n}\to\phi$$

$$1,2,1,5,1,6,1,6,1,6,1,625,1,\overline{615384},1,\overline{619047},\Lambda$$

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\approx 1.6$$

除了出现在艺术、建筑和自然界外，今天黄金矩形还在广告和商业等方面派上用场．许多包装采用黄金矩形的形状，能够更加迎合公众的审美观点．例如标准的信用卡就近似于一个黄金矩形．

黄金矩形还跟许多其他的数学观念相联系．诸如无穷数列、代数、圆内接正十边形、柏拉图体、等角螺线、极限、黄金三角形和五角星形等等．

做一个 3－4 折变体

从广义上讲折变体可以看成拓扑谜题的一种类型．它是由一张纸制作而成的形体，随着一系列的翻折，面上能看到各种不同的图样．

以下物体称为 3－4 折变体．3 是面上能看到图样的数月，4 则是物体面的数目．

现在前面显示出的都是 2，而后面显示出的都是 1．

沿着垂直的中线翻折可使显示出的都是 3．

在小的地方寻找无穷

你能想象什么是无穷吗？

无穷是一个永远没有终结的数量．无穷的概念是难于掌握的．

我们很容易掌握数 7，因为它能描述 7 个苹果；我们也容易掌握十亿（写为 1000 000 000），因为它能描述一罐沙粒的数．但无穷的数量是没有穷尽的．有一种非常精确的方法可以使人感觉到无穷：取一面镜子放在另一个大一点镜子的前面，那么会发生什么事呢？你能看到一面镜子里有一面镜子，里面又有一面镜子，又有一面镜子，……永无终结．

有人可能会想，一个无穷的数量必然会占据很大的空间．这也未必，比如在一个小小的线段 AB 上，A 到 B 之间就有无穷数量的点．

今证如下：

我们应用这样的概念，即任意两点之间必能找到另一个点．于是，如果点 A 和点 B 位于一条线段上，那么它们之间必能找到点 C．而在 A 和 C 之间又能找到另外的点，同样在 C 和 B 之间也能找到另外的点．这种在任意两点之间找另外点的过程可以永远继续下去，这样在线段 AB 上便有无穷数量的点．

另一种描述无穷数量的方法是用类似于“跳蚤的故事”所用的方法．

一只叫“一半”的跳蚤想跳过房间．他的朋友告诉他，他不可能到达另另外一边，如果他每次跤时都留下距离的 $\frac{1}{2}$ 的话，“一半”说他对到达房间的另一边并不发愁．第一次跳“一半”便跳了全程的 $\frac{1}{2}$，剩下的也只有 $\frac{1}{2}$ 的路．接着第二次跳，“一半”又跳过剩下路程的 $\frac{1}{2}$，如此一直 继 续下去．尽管他已非常接近房间的另一边，但他仍须遵循以下的规律：即每一次跳跃只能跳留下距离的 $\frac{1}{2}$．“一半”终于无法跳完那总是剩下的 $\frac{1}{2}$ 的路，于是他只能永不休止地跳下去．

然而，虽说无穷是一个永无终结的数量，它不可能等同于一个数，但我们发现，它既适于一个非常小的空间，也适于一个非常大的空间．

五种柏拉图体

柏拉图体是凸多面体，其边界由全等的正多边形构成．这样的立体只存在五个．

体这个词意味着任何三维的对象，诸如一块岩石，一颗豆，一座金字塔，一只盒子，一个立方体，等等．有一组非常特殊的立体称为正多面体，它是由古希腊哲学家柏拉图发现的．一个多面体称为正规的，如果它的每一个面具有同样的大小和形状．于是立方体是一个正规多面体，因为它的所有的面都是同样大小的正方形，而右边的盒子就不是正规多面体，因为它的面不全是同样大小的矩形．柏拉图证明了只有五种可能的正规凸多面体．它们是四面体，立方体或六面体，八面体，十二面体和二十面体．

这里给出的是制作五种正规多面体的图样．你不想把它们复制下来，剪下并尝试把它们折成三维的样子吗？

制作幻方的金字塔法

金字塔法是用于构造奇数阶幻方的方法之一．下例说明了如何制作一个 5×5 幻方．

程序：

1）如图，沿着对角线方向的框格依次写下幻方的从 1 到 25 的数；

2）重新安置在幻方边框外的所有的数，将其从想象的方阵移到幻方框架中与之对应的位置上来（图中空心的数字是重新安置的）．

开普勒—波因索特体

虽然柏拉图发现了五种归属于他的柏拉图体（四面体，六面体或立方体，八面体，十二面体和二十面体），而阿基米德也有阿基米德体归属于他，但以下四种非凸面体却是古人所不知道的.开普勒于 17 世纪初发现了其中的两种，而后波因索特（Louis Poinsot，1777—1859）重新发现了它，并于公元 1809 年又发现了另外两种．这些形状的立体，今天常用来作灯罩和灯的装饰．

假螺线——视幻觉

下图看起来好像是一条螺线，但仔细检验之后就会发现，它是由一些同心圆构成．这种“方向的组合”是由 J·弗莱塞博士发现并首次披露在英国心理学杂志上的（1908 年 1 月）．这种现象也称为“扭转索”效应．将两股颜色明显差异的绳索拧成一股，然后将它们置于不同的背景上．这样创造出来的幻觉是如此的逼真，以致于无论发现同心圆的痕迹，还是消除螺线或螺旋的错觉，都是一件难事．

二十面体与黄金矩形

黄金矩形出现在我们生活的方方面面——建筑、艺术、自然界、科学和数学．帕西欧里的《神奇的比例》一书（由达·芬奇于公元 1509 年作图解），介绍了许多令人叹为观止的平面几何和立体几何的黄金分割的例子．下面画的就是其中一例．这里三个黄金矩形彼此对称并与其他两个垂直相交．这些矩形的角顶与一个正二十面体的十二个角顶相吻合．

芝诺悖论——阿墓里斯与乌龟

悖论是有趣的，而且是数学的一个非常重要的部分．它突出地表明，在陈述或证明某种想法时小心地使它不出现漏洞是多么地重要．在数学中，我们常常试图使数学思想覆盖尽可能多的方面，例如我们试图概括一个概念以使它能够用于更多的对象．概括无疑是重要的，但它也可能导致危险．我们务必谨慎从事．一些悖论就说明了这种危险的存在．

公元前 5 世纪，芝诺用他的无穷、连续以及部分和的知识，引发出以下著名的悖论：他提出让阿基里斯[①]和乌龟之间举行一场赛跑，并让乌龟在阿基里斯前头 1000 米开始．假定阿基里斯能够跑得比乌龟快 10 倍．当比赛开始的时候，阿基里斯跑了 1000 米，此时乌龟仍然前于他 100 米．当阿基里斯跑了下一个 100 米时，乌龟依然前于他 10 米．

芝诺辩解说，阿基里斯能够继续逼近乌龟，但他决不可能追上它．那么芝诺的理由正确吗？如果阿基里斯追上了乌龟，那么他是在赛程的哪一点追上呢？

（见附录“ 阿基里斯与乌龟 ”的解答）

欧布利德悖论与芝诺悖论

希腊哲学家欧布利德断言，一个人绝不可能有一堆沙．他的见解是：一粒沙不能构成一堆沙，如果在一粒沙上加上一粒沙它们也不能构成一堆．如果你没有一堆沙，那么即使给你加上一粒沙，也同样没有一堆，从而你永远不会有一堆沙．

依着同样的思路，芝诺把眼光瞄在线段上．他断言，如果点是没有大小的，那么加上另一个点依然不会有大小．这样人们就绝不可能得到一个有大小的物体，因为这些物体是由点结合而成的．接着他进一步推断说，如果一个点有大小，那么一条线段就必然有无限的长度，因为它是由无穷数量的点所构成，

[①] 译者注：阿基里斯（Achilles）是荷马史诗中的希腊英雄，神话传说中善跑的神．

神奇的六线形

数学是一笔激发人们好奇和兴趣的无尽财富．下面这一特殊的定理是法国数学家 B·帕斯卡（ Blaise　Pascal，1623—1662）在 16 岁时证明的．他把它取名为神奇的六线形．

如果一个六边形内接于一条圆锥曲线，则它的三组对边的交点共线．

便士谜题

每次滚动一枚便士[①]到新的位置，使其依然接触着两个其他的便士．请将上方图的便士三角形，转为下方图的倒置三角形．

所需的最少移动数为三

[①] 译者注：在美国和加拿大，一分钱的铜币称为便士，也叫一仙；在 英镑．

镶　嵌

简单地讲，平面镶嵌就是用同样形状的平板砖，无缝隙而又不重叠地铺满整个平面．给定平板砖的形状，在实际铺设之前我们能够通过数学的方法预先确定它们是否能够形成镶嵌．演算前要先知道一个数学事实，即圆周角为 360°．

让我们研究一下用正五边形来覆盖地板，这只要用一些器具和几何知识就可以了．一个正五边形有五条相等的边和五个相等的角．为了计算正五边形角的大小，我们把正五边形如右图分为五个全等三角形．由于对任意的三角形而言，其内角和为 180°．由此我们可以确定正五边形的一个内角为 108°．这样一来，当我们试图将同样的正五边形边对边放在一起时，我们发现其间必有缝隙，因为正五边形只能铺出 108°＋108°＋108°＝324°，而无法铺满一圈或 360°的周角．

现在让我们尝试用等边三角形来镶嵌地板．一个等边三角形的内角为 60°．我们看到六个相等的等边三角形摆在一起，是能够铺满一圈的．

那么用正方形、正六边形、正八边形、或者它们的结合体来镶嵌又怎么样呢？下面我们给出一些平面镶嵌的实例．

类似地，空间也能进行镶嵌，只是平板砖要用三维立体来替代．下图是切掉角的正八面体．它们是仅有的能够填满空间的阿基米德多面体．

享有盛誉的荷兰艺术家埃舍尔（M．C．Escher）在他的作品中运用了许多数学概念，诸如莫比乌斯带、短程线、投影几何、视幻觉、三叶形、镶嵌等等．在他著名的作品中有不少采用他自己创造的动人的镶嵌，例如，《变态》、《马术师》、《小而又小》、《正方形的界限》、《圆的界限》等等．除艺术外，他对空间镶嵌的研究和应用，对建筑的内部装饰以及商品包装等领域也怀有特殊的兴趣．

丢番图之谜

丢番图常被人称为代数学之父．但人们除知道他生活于公元 100 至 400 年间之外，对其生平知之甚少．然而，他死时的年岁却是知道的。因为他的仰慕者之一在一则代数谜语中描述了他的一生．

丢番图生命的六分之一是他的童年，再过了生命的十二分之一他长出了胡须．又过了生命的七分之一丢番图结了婚．五年后他得到了一个儿子．但儿子只活了他父亲所活年岁的一半，而在他儿子死后四年丢番图也离开了人世．

试问，丢番图总共活了多少岁？

（见附录“ 丢番图之谜 ”的解答）

哥尼斯堡七桥问题

拓扑学起源于公元 1736 年一个著名问题——哥尼斯堡七桥问题——的解决.

哥尼斯堡[①]是位于普累格河上的一座城市,它包含两个岛屿及连接它们的七座桥.该河流经城区的这两个岛.岛与河岸之间架有六座桥，另一座桥则连接着两个岛.星期天散步已成为当地居民的一种习惯，但试图走过这样的七座桥，而且每桥只走过一次却从来没有成功过.但直至引起瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）注意之前，没有人能够解决这个问题.

那时，欧拉正在圣彼得堡为俄国女皇凯瑟琳服务.在解决该问题的过程中，欧拉创立了一个数学分支，即后来人们所熟知的拓扑学.他在解哥尼斯堡七桥问题时，采用了今天人们称之为网络的拓扑学知识.运用网络，欧拉证明了要走过哥尼斯堡的七座桥且每桥只通过一次是不可能的.

这一问题及欧拉的解答，开创了拓扑学研究的先河.拓扑学是一个相对较新的领域.19 世纪,数学家们才开始对它以及其他的非欧几何开展研究.论述拓扑学的第一篇论文，写于 1847 年.

[①] 原注：在 18 世纪哥尼斯堡是一座德国的城市，今天它属于俄罗斯.

网　络

一个网络基本上可以看成是一个问题的图样．哥尼斯堡七桥问题的网络可以图解如下．

一个网络由顶点和弧线组成．一个可以遍历的网络是指它可以准确一次地穿经所有的弧线，但顶点却可以通过任意次数．哥尼斯堡七桥问题的网络顶点，有如上图所示的 A，B，C，D．注意每个顶点发出的弧线数——A 为 3，B 为 5，C 为 3，D 为 3．由于这些数全是奇数，这类顶点我们称之为奇顶点或奇点．如果一个顶点发出的弧线数为偶数，我们则称之为偶顶点或偶点．欧拉发现，对于一个可以遍历的网络，其奇、偶点具有许多性质．特别地，欧拉注意到：一个奇顶点在这种遍历式的旅行中，要么是起点，要么是终点．由于一个遍历的网络只能有一个起点和一个终点，因而这种网络的奇点数不能多于两个[①]．然而在哥尼斯堡七桥问题的网络中却有四个奇点，因而它是不可能被遍历的．

以上网络中哪一个是可以遍历的（即一笔而不重复地画成）？

你能找到穿经每个门各一次且笔不离纸的通道吗？试证明你的结论．

[①] 译者注：原书说这种网络的奇点数为两个是不够完整的．其实还要考虑起点与终点合一的情形．一个网络可以被遍历，其奇点数要么为 2，要么为 0．所以这里改为“这种网络的奇点数不能多于两个”．

阿兹特克历法

最早和最重要的计算设计是日历——一种测度和记录时间进程的系统．现实的自然界提供了一种有规律的季节顺序，而这些季节则控制着作物的生长．

早期的人类试图揭示太阳日、太阳年以及月亮月之间的相互关系．由于一个月亮月约有 29．5 天，而一个太阳年却有 365 天又 5 小时 48 分 46 秒，从而太阳年不可能是月亮月的整数倍．在探求相互一致的日历中，这始终是一个主要的问题．即使我们现在的日历也不是相一致的，因为每个不被 400 整除的世纪年（例如公元 1700 年，1800 年，1900 年）必须失去它外加的闰日，虽然它依然还是一个闰年．

阿兹特克人[①]有两种日历，第一种日历是宗教日历，这种日历与月亮月和太阳年没有什么关系，但它对于决定宗教仪式有着重要意义，而阿兹特克人还把这种日历中出生的日期作为自己名字的一部分.这种日历含有 20 个记号和 13 个数，并依此形成 260 天固定的循环．阿兹特克人的第二种日历一年包含 365 天[②]，且与农作相适应．天体的循环运行使阿兹特克人得以校正他们的日历，并准确地预测诸如日食、月食这类事件．

公元 1790 年，阿兹特克人的“太阳石”或“石头日历”在整修墨西哥城的一个大教堂时被发现．该教堂建于一个古代金字塔的遗址上．该石呈圆盘状，直径 12 英尺，重 26 吨，它记录了阿兹特克人宇宙观下的世界的历史．

太阳神的浮雕位于中心，四个太阳或宇宙开创时的四样东

西（虎、水、风和火）围绕在太阳神的四周，显示了阿兹特克人所认为的史前世界．这里还出现了一些乐章的符号．另有二十个浮雕形成一个环状的带，它们是：短鼻鳄鱼、风、房子、蜥蜴、蛇、死神、鹿、兔、水、狗、猴、鹅、芦苇、虎、鹰、兀鹰、地震、石器、雨和花，分别表示阿兹特克人宗教日中的二十天．

[①] 译者注：阿兹特克人是西班牙入侵前墨西哥中部的土族印地安人．

[②] 原注：阿兹特克人从玛雅等文化中借鉴了许多基本的东西，也包含了他们的日历部分．

三大不可能的作图问题

数学的美不在于它的答案，而在于它的方法．存在着这样的问题，它的解答就是最终被判定为不可解．

不知什么缘故，“ 不可解 ”似乎像是一个令人失望的答案，然而用以抵达这一结论的思维过程却是极具魅力的，而且在这一进程中还能激发出新的思路．古代著名的三大作图问题便是一个例子．三大作图问题是：

三等分角问题——把一个给定的角分为三个相等的角．

倍立方问题——作一个立方体使其具有给定立方体两倍的体积．

化圆为方问题——作一个正方形使其具有给定圆的面积．

这些问题在两千多年的时间里，一直激励着数学的思维和发现，直至 19 世纪，这三个作图问题才被最终证实为不可能只用圆规和直尺作出．

上述结论可以这样推知：一根直尺可用于作直线，其方程为线性的（一次方程），例如 $y=3x-4$ 等等．

另一方面，一只圆规能作出圆和弧，其方程为一次的，例如 $x^2+y^2=25$ 等等．而这些方程的联立不会产生高于二次的方程．然而从代数上看，解上述三个作图问题所获得的方程并非是一次或二次的，而是三次或者是带有超越数的，而这样方程的解或数只用圆规和直尺是无法得到的．

三等分角问题：

像 135 ° 或 90 ° 这样的特殊角只用圆规和直尺是能够三等分的．但对于任意给定的角，只用圆规和直尺要三等分则不可能，因为用来解这个问题的方程显示为三次的形式：

$$a^3-3a-2b=0.$$

倍立方问题：

在试图将一个立方体体积加倍的努力中，曾有人尝试将其长度加倍[①]，然而这样实际上作出了一个八倍于原立方体体积的立方体．

需要加倍的那个立方体体积$=a^3$．

将该立方体的体积加倍，即要求作出一个体积为 $2a^3$ 的立方体．$x^3=2a^3$，亦即$x=\sqrt[3]{2a}$．

我们再次得到一个只用圆规和直尺无法作出的结局．

化圆为方问题：

给出一个半径为 r 的圆，其面积为πr^2．

[①] 译者注：作者这里暗指的是一则有关倍立方问题的有趣的神话．传说公元前 5 世纪古希腊的雅典流行着一场瘟疫．人们为了消除这一灾难向神祈祷．神说：“ 要使病疫不流行，除非把神殿前的立方体香案的体积扩大一倍 ”．开始人们以为十分容易，只须把香案的各棱放大一倍就行．不料神灵大怒，疫势愈发不可收拾．人们只好再次向神灵顶礼膜拜，才知道新香案体积不等于原香案体积的两倍．这个传说的结局如何，今天已无从推知，但这个古老的问题却从此流传了下来．

我们要求的是作出一个面积为πr^2的正方形．

$$x^2 = \pi r^2，亦即 x = \sqrt{\pi} r.$$

由于π是一个超越数，它不可能通过有限步骤的有理运算和求方根的办法表示出来，从而只用圆规和直尺也不可能将一个圆化为等积的正方形．

虽然我们看到以上三个作图问题只用圆规和直尺是不可能作出的，然而人们却创造了不少解决它们的精巧方法和设计．后者对于激发数学思想的发展，同样起着重要的作用．尼科梅德斯蚌线、阿基米德螺线、希庇亚斯割圆曲线、圆锥曲线、三次曲线、四次曲线以及一些超越曲线，都发端于这古代三大作图问题的某些思考．

古代西藏的幻方

一个 3×3 的幻方，出现在古代西藏人印玺的中央．这是数学思想没有国家和地区疆界的又一例证．幻方上的数是这样的：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

周长、面积和无穷数列

下图描画了无穷多个的三角形，其中每一个三角形都是由外接于它的三角形边的中点所构成．为了确定这些三角形周长的总和，我们先观察以下数列：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\Lambda$$

上面这些分数的和，可以通过观察如下这条标有数的线段而确定．

我们注意到，该数列每增添一个后继的分数，都使它们的和越来越接近于 1，然而决不会超过 1．于是我们可以得出这样的结论，这个数列以 1 作为它的和．

现在你可能很想知道，这些信息将怎样帮助我们确定前面所讲的三角形周长的和．首先让我们依次列出这些三角形的每一个的周长：

$$30,15,\frac{15}{2},\frac{15}{4},\frac{15}{8},\frac{15}{16},\frac{15}{32},\frac{15}{64},\frac{15}{128},\Lambda$$ [1]

将这一数列的和，即所要确定的三角形周长的和

$$30+15+\frac{15}{2}+\frac{15}{4}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}+\frac{15}{32}+\frac{15}{64}+\frac{15}{128}+\Lambda$$

化简得：

$$45+15(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\Lambda\ )$$

现在用 1 替代括号内数列和的值得：

$$45+15\times1=45+15=60,$$

此即所求的周长和．

确定前面那些三角形的面积和则是另一种挑战．你能对这一新的无穷数列的和作一番探索吗？

[1] 原注：这些值的确定用到了一个几何定理：连接三角形两边中点的线段等于第三边（对边）长度的一半．

棋盘问题

如果把一个棋盘对角的两个方格拿掉，你能用多米诺牌覆盖这样的棋盘面吗？

假定每个多米诺牌的尺寸相当于棋盘上两个邻接着的小方格的大小．多米诺牌必须平放，而且不能把一个摆在另一个上面．

帕斯卡的计算机

帕斯卡（Blaise Pascal，1623—1662）是法国著名的数学家和科学家之一．他在诸如概率论、流体力学、水压机等理论数学和科学发现方面多有建树．另外，他在 18 岁时还发明了计算机．用这种机器可以对一长栏的数字实施加法运算．帕斯卡的发明，有助于人们对现代计算机基本原理的了解．

牛顿与微积分学

牛顿（Isaac Newton，1642—1727）是微积分学和引力理论的创始人之一．尽管牛顿是一位数学天才，但他对神学的研究却情有独钟．公元 1665 年，他所就职的剑桥大学由于当时鼠疫横行而关闭．这期间他留在家中，发展了他的微积分形式，使引力理论公式化，同时还钻研了其他物理学问题．遗憾的是，他的前述工作直至 39 岁时才予以公开发表．

这是一份牛顿的手稿，它显示了在一个椭圆形的轨道上引力所产生的影响．

日本的微积分学

记住下面一点是很重要的：在世界各区域的不同文化中，数学的发展往往具有同时性．例如关孝和是一位 17 世纪的日本数学家，他因对日本的微积分发展而受到称誉．下面是公元 1670 年西吉可瓦在做学生时所画的图，图中用一系列矩形面积的和来测定圆的面积．

1＝2 的证明

推理的艺术触及到我们生活的方方面面，比如决定吃什么，用一张什么样的地图，买一件什么样的礼物，或者证明一个几何定理，等等．有关推理的种种技巧，都溶入了问题的解决之中．在推理中一个小小的毛病都可能导致十分怪异和荒谬的结果．例如，你是一名计算机的程序员，你就会担心由于某一步骤的忽略而导致了一种无限的循环．我们中间谁能保证在我们的解释、解答或证明中不会发现一点错误呢？在数学中除以零是一种常见的错误，它能弓泼像下面“1=2”的证明那样的荒谬的结果．你能发现它错在哪里吗？

1=2？

如果 a＝b 且 b，a＞0，则 1＝2．

证明：

1） a，b ＞ 0	已知
2） a ＝ b	已知
3） $ab = b^2$	第 2 步“＝”的两边同“×”
4） $ab - a^2 = b^2 - a^2$	第 3 步“＝”的两边同“－”
5） $a(b-a) = (b+a)(b-a)$	第 4 步的两边同时分解因式
6） $a = (b+a)$	第 5 步“＝”的两边同“÷”
7） $a = a + a$	第 2，6 步替换
8） $a=2a$	第 7 步同类项相加
9） $1 = 2$	第 8 步“＝”的两边同“÷”

（“1＝2 的证明”中的毛病见附录）

晶体的对称

自然现象中的对称和图案是多姿多彩的.公元 1912 年,物理学家 M ·V ·劳厄用 X 射线穿过一个球形的晶体并射在一张照片底版上．结果黑点出现了，它完全按对称的方式排列，连接后形成了以下的图案．这里点的位置与晶体的对称结构有关．

音乐的数学

自古以来，音乐和数学就有着关联．在中古时期，人们把音乐与算术、几何和天文同列为教育的课程．就连今天的电子计算机也始终跟音乐联系在一起．

乐谱的书写是数学在音乐上显示其影响的最为明显的地方．在乐曲的稿中，我们可以找到拍号（4∶4，3∶4 或 1∶4 等）、每个小节的拍子、全音符、二分音符、四分音符、八分音符、十六分音符等等．谱写乐曲要使它适合于每音节的拍子数，这相似于找公分母的过程——在一个固定的拍子里，不同长度的音符必须使它凑成一个特定的节拍．然而作曲家创造乐曲时却能极其美妙而又毫不费力地把它们与乐谱的严格构造有机地融合在一起．对一部完整的作品进行分析，我们会看到每一个音节都有规定的拍数，而且运用了各种合适长度的音符．

除了上述数学与乐谱的明显联系外，音乐还与比例、指数、曲线、周期函数以及计算机科学等相关联．毕达哥拉斯的追随者们（公元前 585—400）最先用比例把音乐和数学结合起来．他们发现在乐声的协调与所认识的整数之间有着密切的关系，拨动一根弦发出的声音依赖于弦的长度．他们还发现协和音是由长度与原弦长的比为整数比的绷紧的弦给出．事实上被拨动弦的每一种和谐的结合，都能表示为整数比．由增大成整数比的弦的长度，能够产生全部的音阶．例如，从一根产生音C的弦开始，接着C的长度的$\frac{16}{15}$给出B，C的长度的$\frac{6}{5}$给出A，C的$\frac{4}{3}$给。

出G，C的$\frac{3}{2}$给出F．C的$\frac{8}{5}$给出E，C的$\frac{16}{9}$给出D，C的$\frac{2}{1}$给出低音 C．

你可能感到惊奇，为什么平台钢琴有它特有的形状？实际上，许多乐器的形状和结构都跟不同的数学概念联系着．指数函数和它的曲线就是这样概念中的一种．一条指数曲线由形如 $y=k^x$ 的方程所描述，这里 k＞0．例如 $y=2^x$，其图象如下．

音乐的器械，无论是弦乐还是管乐，在它们的结构中都反映出指数曲线的形状．

对乐声本质的研究，在 19 世纪法国数学家傅立叶的著作中达到了顶峰．他证明了所有的乐声——不管是器乐还是声乐——都能用数学表达式来描述，它们是一些简单的正弦周期函数的和．每种声音都有三种品质：音调、音量和音色，并以此与其他的乐声相区别．

傅立叶的发现，使人们可以将声音的三种品质通过图解加以描述并区分．音调与曲线的频率有关，音量与曲线的振幅有关，而音色则与周期函数的形状有关．

很少有人既通晓数学又通晓音乐，这使得把计算机用于合成音乐及乐器设计等方面难于成功．数学的发现，即周期函数，是现代乐器设计和计算机音响设计的精髓．许多乐器的制造都是把它们产生的声音的图象，与这些乐器理想声音的图象相比

较然后加以改进的．电子音乐的忠实再生也是跟周期图象紧密联系着的．音乐家和数学家们将在音乐的产生和再生方面，继续担任着同等重要的角色．

数字的回文

回文可以是一个词、一句句子、一个数，等等，只要倒着写与顺着写是一样的．

例如：

(1) madam， I’m Adam·

(中译：女士，我是“亚当”．[①])

(2) dad

(中译：(口语) 爸爸)

(3) 10233201

(4) “Able was I ere I saw Elba.

(中译：“在我见到厄尔巴岛之前我无所不能．”[②]) 下面是一种数的有趣的特性：

由任一整数开始．加上由它数字倒着写所形成的数．将所得的和加上由和的数字倒着写所形成的数．继续这样的过程，直至出现一个数字的回文时结束．

你永远会以一个数字的回文结束吗？

[①] 译者注：此典故来自 M·加德纳在《科学美国人》上的一篇专文．乃亚当初见夏娃时的自我介绍。

[②] 译者注：相传这句话出自法兰西皇帝拿破仑一世之口．1813 年，英、俄、普、奥等国组成第六次反法同盟，使法军遭受了莱比锡的失败．1814 年 4 月 6 日，无力再战的拿破仑宣布退位．他被放逐到地中海上的厄尔巴岛．

预料不到的考试的悖论

一位老师宣布说，在下一星期的五天内（星期一至星期五）的某一天将进行一场考试，但他又告诉班上同学：“你们无法知道是哪一天，只有到了考试那天的早上八点钟才通知你们下午一点钟考．”

你能说出为什么这场考试无法进行吗？

巴比伦的楔形文本

巴比伦人大概采用粘土板作为书写美索不达米亚人楔形文字的材料，因为美索不达米亚人用来书写的材料纸草不太近便．他们所使用的数制是 60 进制的位置系统，这个系统使用两个符号，代表 1，<0152_2T>代表 10．=60×10=600．巴比伦人的粘土板上的记录，是他们能够应用他们的数的系统进行复杂计算的证据．以下粘土板上的巴比伦人的问题和解答写于汉漠拉比统治期间（约公元前 1700 年），该问题所论的是长度、宽度和面积．

阿基米德螺线

螺线的形状出现在自然界的许多方面，诸如藤蔓、贝壳、旋风、飓风、松果、银河系、漩涡，等等.

<0153_1T>

阿基米德螺线是一种二维螺线．想象一只臭虫沿着过螺线中心（极点）的直线以一定的速率爬行，而同时这条直线又按均匀的速率绕极点旋转．那么这只臭虫所经历的轨迹将是一条阿基米德螺线.

数学思想的演化

“对于天体（一般而言）和大彗星（特殊而言）来说，三千年算不了什么：在永恒的时间表上，那还不到一秒钟．但是，数学家读者们，你们跟我一样清楚，三千年实在是很长很长的！”

——[法] 弗拉马利翁，1892[①]

数学是一种思想的演化，它始于史前人类最早的发现，那时人们由于分食物而发明了数的概念．每一种贡献，不管它多么小，对数学思想的发展都是重要的．有些数学家甚至为某种单一的想法而耗费了自己的一生，而这种想法有时也仅仅是有别于他人的研究而已．例如，我们来看一看欧几里得几何发展的概略．几何思想是由古代许多不同的人发现的．台利斯（Thales，公元前 640—546）最早用逻辑的方法对几何的概念加以研究．大约在公元前 300 年，欧几里得把前人创造的几何思想加以收集、整理．这是一项艰巨的工作．他把所有有关的知识编辑成一个数学体系，这就是后来众所周知的欧几里得几何．在欧几里得的书《几何原本》中，内容的编排遵循着逻辑发展的顺序．《几何原本》写于两千多年前，虽然今天的数学家们经过仔细推敲，发现它离一个完整的数学体系相距尚远，但它依然作为非凡的一页而永载史册！

阿波罗尼斯从欧几里得的著作中获得了灵感，对数学的许多领域，诸如圆锥理论、天文学和弹道学等，作出了具有历史性的贡献．上图所画的是他感兴趣的一个问题：

给出三个定圆，试求一个圆使它与三个定圆都相切．

图解表明该问题有八种解答．

[①] 译者注：弗拉马利翁（FlammarionCie，1842—1925）是法国天文学家和诗人．他的名著《大众天文学》（三卷），曾经激励着一代代天文爱好者．该书自 1879 年出版以来，已译成几十种文字，受到世界各地广大读者的称赞和欢迎．中文译本于 1965 年由科学出版社翻译出版．

四色地图问题

对地图制作者来说，一个画在平面或球面上的地图，只要用四种不同的颜色便能把不同的国家区分开，这是一条未经证明的永恒法则．1976 年，著名的四色地图问题由美国伊利诺斯大学的 K·阿佩尔和 W·哈肯用计算机给予了证明，但他们的计算机证明依然面临着挑战．

为了增添一些花样，我们考虑在不同的拓扑模型上的地图着色．拓扑学研究了许多非同寻常的形状的表面——油煎圈饼、油条式脆饼、莫比乌斯状的表面等等．一个球面能够通过戳一个洞，然后将它张开、摊平而成为一个平面．因而从本质上讲，一个球面的着色跟一个平面的着色，所需求的颜色数是一样的．拓扑学研究的是物体在如同橡皮膜那样伸张和皱缩的变形下保持不变的性质．究竟有哪些性质在这些变形下保持不变呢？由于扭曲是允许的，所以我们推知拓扑学不考虑对象的大小、长短、形状和刚性．拓扑学所要找的是位置的特征，诸如点在一曲线的内部或外部，一个表面是单面还是双面，一个对象是否是一条简单的闭曲线，或它所具有的内部或外部的区域数等等．对于前面所提的那些拓扑学对象，地图着色是一个完全新的问题，因而四色问题的解对它们也不适用．

试对一张纸条上的各种不同的地图着色．然后把它扭转半圈并将端头粘接在一起，做成一条莫比乌斯带．此时四色总是够吗？未必！那么对于任意的这种地图最少需要多少颜色呢？试在一个环面上（具有油煎卷圈饼的形状）对地图着色．最容易的方法是用纸张做一个想象的油煎圈饼，然后在上面做试验．可先在纸的一面上对地图着色，然后卷成圆筒状，再把圆筒弄弯并像油煎圈饼那样把两头接在一起．你能确定在这样一个环面上的地图着色问题，最少需要多少种颜色吗？

艺术与动态的对称

在自然界里有许多的形状是对称的——树叶、蝴蝶、人体、雪花，等等.当然，也有许多自然界的形状是不对称的，像蛋的形状，蝴蝶的翅膀，鹦鹉螺和花斑鲈鱼的形状等等．这些非对称的形式同样具有一种美丽的均衡，而这种均衡就是人们所熟悉的动态的对称．在所有动态对称的形状中，我们总能找到黄金矩

形[①]、黄金比例或黄金分割．

把黄金矩形和黄金分割用于艺术是动态对称的技巧．A·丢勒、P·曼诸利安、达·芬奇、S·达利和G·贝娄等人都在他们的作品中用黄金矩形去创造动态的对称．

上图显示了鹦鹉螺、蛋、蝴蝶翅膀、花斑鲈鱼等动态的对称．

[①] 原注：见“黄金矩形”一节．

超限数

你说在下面的集合里各有多少个元素呢？

{a，b，c}？

$\{-1，5，6，4，\frac{1}{2}\}$？

{ }？

如果你的回答是 3，5 和 0，那么实际上你所给出的就是这些集合的基数．

现在请问在以下集合里有多少个元素：

{1，2，3，4，5，…}？

如果你回答是一个无限的量，那么你的答案是不够明确的，因为存在着各种各样的无限的集合．事实上，上述无限集合的基数是被称为超限数的第一个数．

正如名称所暗示的那样，超限数（超越有限）是描述无限数量的一种“数”，它可以充分地描述一个无限集合．两个集合如果它们元素之间能够配成一一对应，不多也不少，那么我们就说这两个集合具有同样的基数。

例如：

{a，b，c，d}
|　|　|　|
{1，2，3，4}

有基数 4，也就是在每个集合中含有 4 个元素．

集合 A={1，2，3，4，5，…，n，…}
|　|　|　|　|　|
集合 B=$\{1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，…，n^2，…\}$

集合 A 和集合 B 有同样的基数，因为两个集合的元素之间能够如图所示形成一一对应．这里似乎出现一种自相矛盾的情形，集合 A 中显然含有非完全平方数，但它在配成一一对应的过程中却没有元素留下来．

19 世纪德国数学家康托（George Cantor，1845—1918）创造了一种适用于无限集的新数体系，从而解决了上述悖论．他采用了符号 $\aleph$（读阿列夫——希伯来字母表的第一个字母）作为无限集中元素的“数”．特别地，$\aleph_0$是其中最小的超限基数．

以下集合中元素的数目可表为 $\aleph_0$（阿列夫——零）：

自然数集={1，2，3，4，5，…，n，…}

非负整数集={0，1，2，3，4，5，…，n－1，…}

正整数集={+1，＋2，＋3，＋4，＋5，…，n，…}

负整数集={－1，－2，－3，－4，－5，…，－n，…}

整数集={…，－3，－2，－1，0，1，2，3，…}

有理数集．

（以上 n 代表整数）

所有上述集合都可以与自然数集配成一一对应，从而都具有基数 $\aleph_0$ 。

下例显示了自然数集与非负整数集之间的一一对应的方法：

{1，2，3，4，5，…，n，…}自然数集
|　|　|　|　|　|

{0，1，2，3，4，…， n－1，…}非负整数集

自然数与正有理数之间的对应如下：

{1，2，3，4，5，6，7，8，9，…}

| | | | | | | | |

$\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \Lambda\}$

下表显示了在前面集合中有理数的位置顺序：

康托还发展了一种完整的超限数算术体系：

他还证明了

而$\aleph_1$则描述实数、一直线上的点、平面上的点、及高维空间的任一部分**的点的基数.**

逻辑问题

这是一道逻辑问题，其写作年代可追溯到公元 8 世纪．

一个农夫要带他的羊、狼和白菜过河．他的小船只能容下他以及他的羊、狼或白菜三者之一．如果他带狼跟他走，那留下的羊将吃掉白菜．如果他带白菜走，则留下的狼也将吃掉羊．只有当人在的时候，白菜和羊才能与他们各自的掠食者安全相处．

试问农夫要怎样做才能把每件东西都带过河？

（见附录“ 农夫、狼、羊和白菜 ”的解答）

雪花曲线

雪花曲线[1]因其形状类似雪花而得名，它的产生假定也跟雪花类似．

由图 1 那样的等边三角形开始．然后把三角形的每条边三等分，并在每条边三分后的中段向外作新的等边三角形，但要像图 2 那样去掉与原三角形叠合的边．接着对每个等边三角形尖出的部分继续上述过程，即在每条边三分后的中段，像图 3 那样向外画新的尖形．不断重复这样的过程，便产生了雪花曲线．

<0165_1T>

<0165_2T>

<0165_3T>

雪花曲线令人惊异的性质是：它具有有限的面积，但却有着无限的周长！

雪花曲线的周长持续增加而没有界限，但整条曲线却可以画在一张很小的纸上，所以它的面积是有限的，实际上其面积等于 原三角形面积的$\frac{13}{5}$倍[1]．

---

[1] 原注：更多的信息可见“ 分形——真实还是想象？ ”一节．

[1] 译者注：这个结论似乎有错．正确的结果应该是原三角形面积的　边数依次为 3，3× 4，3× 42，3× 43，⋯，3× 4n-1，⋯　样，雪花曲线所包围的面积为

零——始于何时何地

零这个数对于我们数的系统来说是必不可少的．但是，当开始创造数的系统时，并没有自动包含零．事实上，古埃及人的数的系统就没有零．公元前 1700 年左右，60 进制数的位置系统发展起来．古巴比伦人用它和他们的 360 天的日历相协调，并进行复杂的数学运算，但其中就没有设计零的符号，而是在需要放置零的地方留一个空的位置、大约在公元前 300 年，巴比伦人开始用作为零的符号．在巴比伦人之后，玛雅人和印度人发展了数的系统，该系统第一次用一个符号代表零，这个符号既起位置的作用，也起数零的作用．

帕普斯定理与九币谜题

帕普斯定理：

如果 A，B，C 为直线 l_1 上的点，而 D，E，F 为直线 l_2 上的点．则 P，Q 和 R 三点共线．

应用帕普斯定理解“九币谜题”．

九币谜题：

重新排列以上九枚硬币，使它从原先 8 行每行 3 枚，变为 10 行每行 3 枚．

（见附录“九币谜题”的解答）

日本的幻圆

这个日本的幻圆引自关孝和的著作．关孝和是一个 17 世纪的日本数学家，他以发现微积分的一种形式及解方程组的矩阵算法而享誉数坛．

在幻圆中，每一条直径上数的和一样．构成该幻圆的方法似乎类似于高斯求头 100 个自然数和所用的方法．

传说高斯在念小学的时候．他的老师给班上的同学出了一道题目，即求头 100 个自然数的和．但见全班同学顿时忙碌起来，用通常人们解这类问题的办法而一个个地相加．此时的高斯正端坐在自己的座位上思考着．老师以为他正在做白日梦，于是催促他抓紧．不料高斯回答说，他已经解出了这道题．老师问他是怎么解的，高斯用下面的图说明了自已的解答．

球形圆顶与水的蒸馏

每一天我们所遇到的或用到的几何形状不可胜数．一个非同寻常的例子出现在远离希腊的西密岛上，那里有一个半球形状的太阳能蒸馏装置，供应岛上 4000 个居民每人每天约一加仑的淡水．

太阳的热量使中心部分供应的海水蒸发．然后淡水凝结在透明的半球形圆顶的下方，并沿着底面往下流，流到圆顶的边缘收集起来．

螺旋——数学与遗传学

螺旋是一种迷人的数学对象，它触及我们生活的许多领域，诸如遗传的结构，扩张的模型，运动的姿态，等等．可能是自然存在的，也可能是人造的．

要了解螺旋，重要的是要看它的构造．让一组全等的矩形形状的砖，依纵长的方向连接，则会形成一个细长的矩形砖柱．如果对一组有一个面倾斜的矩形砖施行同样的过程，结果砖柱会弯曲并绕成一个圆．但如果将每块矩形砖都在对角方向切一个面,那么砖柱将绕着它自身形成一个三维的螺旋.去氧核糖核酸 DNA——遗传染色体，就是像这样的两条三维螺旋构成．DNA 有两列磷酸盐醣分子，它将不对称的分子个体，像上面讲的修整过的矩形砖那样连接起来．

螺旋有着不同的类型．直的矩形柱和圆的柱只是螺旋的特殊情况．螺旋可能向顺时针方向扭转（右旋）或向逆时针方向扭转（左旋）．一个右旋的螺旋有如一只螺丝锥一样，而当它反映在一面镜子中时，则显示出左旋．

螺旋的不同类型的例子可见于我们这个世界的方方面面．像圆形楼梯、电缆、螺丝钉、自动调温器弹簧、螺母、绳索、冰糖藤等等，它们有的是右旋的，有的是左旋的．螺旋若是绕着圆锥旋进，则称为圆锥形螺旋．这种螺旋可见于螺丝钻、弹簧床面、以及纽约博物馆的螺线形的盘道（由 F·L·赖特设计）．

在自然界也能找到许多螺旋的形式——羚羊、公羊、角鲸和其他有角哺乳动物的角；病毒；一些蜗牛和软体动物的壳；植物的茎、梗（如豌豆等）、花、果、叶等结构．

人类的脐带也是一种三重的螺旋，它是由一根静脉管和两根动脉管盘绕着留下来的．

左旋螺旋和右旋螺旋缠绕在一起的现象并不罕见．忍冬（左旋）和常春藤（右旋）

经常配对生长在一起．在莎士比亚的不朽名著《仲夏夜之梦》里就有一个地方提到它：

蒂塔利娅皇后对波屯说：“就这样睡吧！我将把你搂在我的臂上……就像蛇葡萄（一种普通的常春藤）和甜忍冬那样总是扭缠在一起．”

再看看其他领域里出现的螺旋．例如螺旋的通道可以在以下地方发现：飓风、漩涡、一只松鼠上下树的路线，以及新墨西哥卡尔巴大洞穴中的墨西哥蝙蝠的飞行线路等等．

自从螺旋与 DNA 分子之间的联系被发现，在如此众多的领域里呈现出螺旋的现象也就不足为奇了．在自然界中螺旋以它们不同的形式生长着，这是受它们遗传密码控制的结果．在遗传基因的控制下，生物能不断地按它们各

自的图案，自然地生长.

幻“直线”

公元一千九百年，C·F·布拉顿发现幻方能够用来构造艺术上令人喜爱的图案．他发现，如果将一个幻方中的数依次连接起来，会形成一种有趣的图案，它就是著名的幻直线．实际上幻直线并非一条直线，而是一个图样，当把该图样用黑白交错着色时，一些非常珍奇的图案就被创造出来．作为一名建筑师，布拉顿把幻直线用于建筑装修以及书籍和织品的设计．

这是洛书的幻直线．洛书是人类已知的最早的幻方，约于公元前 2200 年出自中国．

这是公元 1514 年丢勒所作动方的幻直线．

数学与建筑

我们非常熟悉某些用于建筑的数学形式，诸如正方形、矩形、锥形和球形等等．但有一些建筑结构却以人们知之甚少的形状设计．一个引人注目的例子便是旧金山圣母玛利亚大教堂所用的双曲抛物面设计．该设计出自P·A·鲁安、J·李以及罗马的工程顾问 P·L·奈维、马萨诸塞州工程学院的 P·比拉斯奇等人．

在剪彩仪式上，当人们问到对于该教堂米开朗基罗[①]会怎么想时，奈维回答道："他不可能想到它，这个设计是来自那时尚未证明的几何理论．"

建筑物的顶部是一个 2135 立方英尺的双曲抛物面体的顶阁,楼面的上方有 200 英尺上升的围墙，由四根巨大的钢筋混凝土塔支撑着，该塔延伸到 94 英尺的地下．每座塔重达九百万磅．墙由 1680 间钢筋混凝土结构的库房组成，含有 128 种不同的规格．正方形基础的大小为 255×255 平方英尺．

一个双曲抛物面是抛物面（一条抛物线绕它的对称轴旋转）和一条三维的双曲线的结合。

双曲抛物面的方程为：

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$$

$$(a,b>0,c\neq 0)$$

[①] 译者注：米开朗基罗（Michelangelo，1475—1564）是意大利著名的雕刻家、画家、建筑师和诗人．

视幻觉的历史

19 世纪的下半叶，在视幻觉领域掀起了一阵兴趣的波涛.

这期间将近有二百份由物理学家和心理学家撰写的论文发表，这些论文对视幻觉和它为什么会发生作了细致的描述.

视幻觉是由人们的注意力、眼睛构造、或两者的结合而产生的. 我们看到什么并不意味着它总是存在，重要的是要凭实际测量确定，而不是基于感觉的结论.

上面是 19 世纪触发视幻觉研究的一张幻觉图. J · 佐罗纳（Johann Zollner，1834—1882），一位天体物理学家和天文学教授（他对彗星、太阳和行星以及光度计的发明等方面作出了许多贡献）偶然间碰到了一块类似于上图所画的编织物. 其中垂直的线实际上是平行的，但看起来却并非这样. 对这种视幻觉的几种可能的解释是：

1）设置在平行线段上不同方向的锐角之间的差异.

2）眼睛视网膜的曲率.

3）有层次的线段使我们的眼睛集中和分散，它造成了平行线段视觉上的弯曲.

人们发现，当斜的线段与平行线段成 45 ° 角时，造成的幻觉尤为强烈.

这是一张著名的视觉幻影图，由漫画家 W · E · 希尔创作，发表于公元 1915 年，它属于振动幻影一类，因为我们的眼睛会在两种形状之间转换——一个年老的女人和一个年轻的女人。

你能使涂黑的面既能变成立方体的顶面，也能变成立方体的底面吗？

三分角与等边三角形

几何拥有一笔思想、概念和定理的财富．发现一些性质并把它用于某些几何对象是极为有趣的．例如，任取一个三角形，三等分它的三个角．然后研究三等分线所形成的图形．请问你注意到什么了吗？

① 原注：能够证明，这些三等分线永远会构成一个等边三角形，不管原三角形的形状如何．

木柴、水和谷物问题

从每座房子各分出三条路，一条通向井，一条通向谷物磨坊，而另一条通向柴棚，要求这些通路彼此不相交，你能解决这个问题吗？

水

木柴

谷物

巴贝格——现代计算机的达·芬奇

现代计算机的达·芬奇——巴贝格（Charles Babage,1792—1871）是一位英国数学家、工程师和发明家，除了发明速度计，各种精密机械，以及能让灯塔定时发出亮光的装置之外，他还花费了大量的时间用于制造一台能够施行数学运算和计算的机器．

巴贝格“差分机”的原始模型是用齿轮制作的，这些齿轮固定在轴上，由一根曲柄转动而带动，它能产生一张 5 位数的平方表．稍后，巴贝格又设计了更好的机器，包含有 20 位数，而且能将答案刻在铜制的盘上．在制作零件的过程中，他成为一名熟练的专家和技师，发展了更加优良的工具和预示着现代方法的技巧．他对原有的零件和设计不断地加以完善．他的至善主义以及那时的技术水准，在他所完成的最后制品中得以充分保留．当他放弃差分机时又萌生了分析机的想法[①]——能做任何数学运算,具有 1000 个 50 位数字的记忆容量,能用自身数据库中的表,能比较答案并依据指令进行判断.机器的执行结果能通过机械转换并打卡输出．虽然巴贝格的想法在当时绝对无法实现，但他的分析机的逻辑结构则可用于今天的计算机．

分析机实际上代表了这样的一类机器，它与我们今天的计算机具有同样的意义．令人惊叹的是，巴贝格不仅开拓这一现代的思想，设计了机器，发展了构造它的工具，策划了它的各个阶段，而且还发展了程序设计方面所需要的数学．这真是一——

上图是巴贝格差分机的一部分．该机造于 1823 年，并于 1842 年废弃．

项非凡的工作！为了表示对 C·巴贝格的敬意，IBM 公司专门建造了一台分析机的工作模型，以资纪念．

[①] 原注：艾达·洛弗拉斯（L·拜伦的女儿）鼓励并引发了巴贝格在分析机方面的工作．除了在经济上对巴贝格的工作予以资助外，她在数学方面的丰富知识和敏锐的眼力，对于分析机的程序设计具有无比的价值．同等重要的是，她为了他的事业而倾注了自己的全部热情．

数学与穆斯林艺术

自从人类身体的画像为伊斯兰教徒们所戒禁以来，他们的艺术形式便导入了其他领域，局限于装饰和镶嵌[①]，并集中于几何的图案．结果在他们的艺术与数学之间产生了一定的联系．

他们所创造的丰富的图样显示出：

●对称

●镶嵌、反射、旋转、几何形状的转换

●黑白图样间的对等

上图表现出镶嵌、反射、旋转和对称．而黑白形状之间的对等也是该图案最为精彩的部分．

[①] 原注：平面“镶嵌”是指用一种特殊形状的平板砖来铺盖平面，使得既无缝隙也无重叠．

一个中国的幻方

下图所示的是中国的幻方，它已有近四百年的历史．这个幻方译成阿拉伯数字是：

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

无穷与极限

下图是这样的：在圆外面作外切正多边形，又在正多边形外面作外接圆，再作外切正多边形，又再作外接圆，如此等等．正多边形的边数连续增加，似乎你会感到这种圆的半径会无限增大，但事实上半径的增大接近于一个极限，极限值大约等于初始圆半径的 12 倍．

假币谜题

有十堆银币，每堆十枚．已知一枚真币的重量，也知道每个假币比真币重量多 1 克，而且你还知道这里有一堆全是假币，你可以用一架台式盘秤来称克数．试问最少需要称几次才能确定出假币？

巴特农神殿——一种视觉与数学的设计

公元前 5 世纪的古希腊建筑师们是运用视幻觉和黄金分割的能手．这些建筑师们发现，一个完全直的建筑结构，在我们眼睛看起来未必显得是直的．

这种歪斜是由于我们的视网膜的曲率所造成的，当一条直线落在特殊角的范围内而我们用眼睛看它时，便显示出曲的．巴特农神殿就是其中最为著名的例子，它说明古代的建筑师们怎样对那些由于我们眼睛造成的歪斜进行补偿．巴特农神殿成排的圆形柱子实际上是向外弯曲的，神殿的矩形基座的边也是这样做的．

下图 1 说明如果建筑师们不加以调整的话，巴特农神殿将会显现出怎样的情形．

然而，由于进行了上面所说的补偿，整个神殿建筑和圆柱便显得笔直而令人赏心悦目．

古希腊的建筑师和艺术家们也发觉,黄金分割和黄金矩形[①]会使建筑物和雕塑增添美感．那时他们已经具有黄金均值的知识，诸如怎样构造它，怎样近似它，以及怎样应用它作黄金矩形等等．巴特农神殿说明，该建筑物应用了黄金矩形．下图 2 显示神殿的尺寸与黄金矩形几乎精确地吻合．

[①] 原注：更多的信息请见“黄金矩形”一节．

概率与帕斯卡三角形

以下由六角砖构成的三角形,有一种独特的产生帕斯卡三角形的方式.球从顶部的贮罐下落，并通过六角形的障碍物抵达下方而收集起来．对于每个六角形，球向左或向右滚落有着相同的机会．如图所示，球滚落的机会是按帕斯卡三角形的数分配的．在底部收集到的球会呈示一种钟形的正态分布曲线．这种曲线可以用于诸如保险公司的比率设置，分子行为的科学研究，以及人口分布的宏观探索，等等．

拉普拉斯（Pierre Simon Laplace，1749—1827）把概率定义为：一个事件的发生数与该事件所有可能的总数的比．因此，当我们掷一枚硬币的时候，得到正面的概率为：

$\frac{1}{2}$ 1——一枚硬币的正面数；2——可能的事件（正面和反面）数

帕斯卡三角形可以用来计算不同的组合数和所有可能组合的总数．例如，在空中投掷四枚硬币，正反面可能的组合如下：

4 个正面——正正正正=1

3 个正面与 1 个反面——正正正反、正正反正、正反正正、反正正正=4

2 个正面与 2 个反面——正正反反、正反正反、反正正反、正反反正、反正反正、反反正正=6

1 个正面与 3 个反面——正反反反、反正反反、反反正反、反反反正=4

4 个反面——反反反反=1

在帕斯卡三角形中，从顶上往下数第四行所指的正是这些可能的结果——1，4，6，4，1．这些数的和即表示可能结果的总数=1＋4＋6＋4＋1＝16．于是，掷出 3 正 1 反的概率便是：

$\frac{4}{16}$ 4——3 正 1 反的可能组合数；16——所有可能组合的总数

对于更大的组合，就帕斯卡三角形而言，只是一种乏味的延伸，但它却能应用于牛顿二项展开式．帕斯卡三角形包含了二项展开式 $(a+b)^n$ 的系数．例如，要找出 $(a+b)^3$ 的系数，只要看帕斯卡三角形从顶行起的第 3 行（顶行作为零行，即 $(a+b)^0=1$）．在该行人们可以找到 1，3，3，1，它正是我们要找的系数：

$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

一般的 n 次二项展开式可用帕斯卡三角形的第 n 行．

二项展开式

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2+\cdots+b^n$$

第 r 项系数为：

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

从 n 个物体中一次取出 r 个的组合数是：

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

如 10 件物体一次取 3 个的组合数为

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

也就是说，10 件物体每次取 3 个有 120 种可能的组合，这可与帕斯卡三角形的第 10 行加以比较核实.

渐开线

把一根绳子缠卷在另一条曲线上（这里是一个圆），然后逐渐把卷曲的部分展开，其端点会描出一条曲线，它便是渐开线．在自然界里有许多渐开线的例子，例如一张悬挂着的棕榈叶的梢部，一只鹰的嘴，一条鲨鱼的背鳍，等等．

五边形、五角星形与黄金三角形

由一个正五边形开始，画它的对角线，便会产生一个五角星形、在五角星形中存在着许多黄金三角形，这些黄金三角形分五角星形的边成黄金比．

黄金三角形是一个等腰三角形，它的顶角为 36°，每个底角为 72°．它的腰与它的底成黄金比．当底角被平分时，角平分线分对边也成黄金比[①]，并形成两个较小的等腰三角形．这两三角形之一相似于原三角形，而另一三角形可用于产生螺旋形曲线．

平分新的黄金三角形的底角并继续这样的过程，会产生一系列黄金三角形，并形成一条等角螺线[①]．

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \text{黄金比}\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1.6180339\Lambda$$

[①] 原注：更多的信息可见第 33 页有关黄金比的脚注．

[①] 原注：请见“黄金矩形”一节有关等角螺线的信息．

三人面墙问题

三个人位于垂直墙的一直线上，并将眼睛蒙起．然后从装有三顶茶色帽子和两顶黑色帽子的箱中取出三顶让他们三人戴上．并将以上信息告知他们．接着把他们眼睛上的蒙布拿掉，并要求每人确定各自所戴帽子的颜色．

离墙最远的那个，他看到了前面两人帽子的颜色后说：“ 我不知道我所戴帽子的颜色．”离墙第二远的那个人听到了上面的回答，又看到了前面一个人戴的帽色，也回答自己不知道．而第三个人，虽然他看到的只是墙，但他听到了前面两人的回答，却说：“ 我知道自己所戴帽子的颜色．”

试问，他所戴的帽子是什么颜色？又是怎样确定的呢？

（见附录“ 三人面墙问题 ”的解答）

几何的谬误与斐波那契数列

如果一个正方形的边长是由两个连续的斐波那契数的和构成，那么它将使我们想起一个有趣的几何谬误．

例如：

1）用连续的两个斐波那契数 5 和 8．

2）构成一个 13×13 正方形．

3）如上图左剪开，并如上图右拼合．现在计算正方形与矩形的面积，会发现正方形面积要比矩形面积大 1 个单位．

4）对斐波那契数 21 和 34 进行同样的步骤．这种情形下矩形面积要比正方形面积大 1 个单位．

这一个单位的盈缺，将在正方形面积与矩形面积之间交错出现，是盈或是缺有赖于我们所用的是哪两个连续的斐波那契数．①

迷宫

迷宫在今天只是一种供人消遣的谜题，但早期的迷宫却使人感到神秘、危险和惶惑．人们的确会在迷宫那错综迂回的通道上迷失去处，或者还担心会突然遭遇那隐匿于迷宫内部的巨型怪兽．在古代，人们常常构筑迷宫以保卫要塞，入侵者将被迫在迷宫中行进一段很长的距离，这样便容易暴露并遭受攻击．

迷宫出现于世界上各个不同的地区，遍及于几乎所有的国家：

●爱尔兰石谷中的石雕——约公元前 2000 年．

●克利特岛上的迈诺斯迷宫——约公元前 1600 年．

●意大利的阿尔卑斯山、庞贝古城、斯堪的那维亚半岛．

●威尔士和英格兰的草地迷宫．

●在欧洲的教堂地板上的摩西迷宫．

●非洲人的织物迷宫．

●亚利桑那的印第安人的石雕．

今天，迷宫是心理学和计算机设计感兴趣的一个领域．心理学家用迷宫对人类和动物的学习行为研究了几十年．计算机专家在设计机器人时，第一步就是要先解决迷宫问题．

拓扑学是一个数学的领域，迷宫的研究则属于网络的一个分支（用图示的方法解题）．一条若当曲线经常被误认为迷宫．在拓扑学中我们知道，若当曲线是由一个圆经扭转、弯曲和环绕（但不自交）而得，它具有一个内部和外部，就像一个圆而不像一个迷宫．要从若当曲线的内部走到外部，无论如何必须跨越曲线．

自从机器人被用于解迷宫，解迷宫问题的系统方法便被设计出来．

解迷宫的方法：

1）对一个简单的迷宫，只要遮掉你所见到的小路和环圈，留下的路将会通达终点，接下来只要选择最直接的通路就可以了．如果迷宫比较复杂，那么这种方法用起来就比较困难．

2）永远保持贴着墙的一边（左或是右）走过迷宫．这个方法很容易，但并非对所有的迷宫都能这样做．例外的情形有：

a）该迷宫有两个入口，而且有一条不通过终点的路线连接它们；

b）迷宫的路中带有环绕终点的圈．

3）法国数学家 M·特马克设计了一种解任意迷宫的一般性方法．程序如下：

a）在你走过的迷宫路的右侧画一条线；

b）当你走到一个新交叉点时，你可以选取任意一条你想走的路；

c）如果你在新的路上又回到旧的交叉点或死胡同，那你便转回头；

d）如果你在旧路上走到一个旧的交叉点，那你就取任意一条新路（假如有一条的话），否则就取一条旧路；

e）决不进入一条两侧都做了记号的路．

以上方法虽然简单，但却要花费不少时间．

无论从生活实际还是用手上的铅笔，迷宫都依然是一种挑战，或提供娱乐，或激发思想．

以上伦敦的迷宫出现在 1908 年 4 月号的《斯特兰德杂志》上（斯特兰德是伦敦的一条重要市街，位于上图左端——译者）．原图附有以下说明："旅游者可以想象由滑铁卢路进入，而他的目的地是到达保罗大教堂．假定他没有跨过任何设想的、因整修道路而设置的栏栅．"

中国的计算板

图中所示的一块方格板，是中国人用来计算的计算板．在历史上中国人最早发展了一种系统，该系统设置了若干法则用以解联立方程组．

他们在方格板上放置了一些备用的算筹，然后应用相当于矩阵的规则来解决问题．

圆锥截线

有不少人对此感到迷惑不解，为什么数学对一个问题或一种想法的执着追求，仅仅是因为它有趣或珍奇．回顾一下古希腊的思想家，我们发现他们所研究的内容，并不注重于直接的应用，而是缘于兴趣、刺激或挑战．圆锥曲线的研究就是一个例子。

对于圆锥曲线，他们当初的主要兴趣在于，用它来帮助解决古代的三大作图问题——即化圆为方、倍立方和三等分角问题．这些问题在当时没有什么实际的价值，只是人们感到数学思想受到挑战和刺激而已．许多想法在很长的年代里都无法显示出它们自身的价值．圆锥曲线产生于公元前 3 世纪，然而直至 17 世纪数学家们才为它奠定了理论基础并加以公式化．例如，开普勒用椭圆描述行星的轨道，而伽利略发现抛物线吻合于地球上弹道的轨线，等等．

下图表明，当一个平面与两个圆锥体相交时会产生：圆、椭圆、抛物线和双曲线．

问题：一个平面要怎样与圆锥相交才能产生一条直线、两条相交直线、或一个点？

在宇宙中有许多构成圆锥曲线的例子．当代最为令人鼓舞的例子之一就是哈雷彗星．

公元 1704 年，哈雷在研究不同彗星轨道资料的有效性时得出结论：1682，1607，1531，1456 等年份出现的是同一个彗星，它沿椭圆形的轨道绕太阳运转，每运转一周约 76 年．他成功地预言了这颗彗星将于 1758 年回归．从而使这颗后来以哈雷名字命名的彗星，因之而举世闻名．新近的探索还表明，早在公元前 240 年，中国人就已记录到了哈雷彗星．

在宇宙中圆锥曲线的例子

抛物线——

- 喷水的弧线
- 闪光灯反射面的形状

椭圆——

- 某些行星和某些彗星的轨道

双曲线——

- 某些彗星和另一些天体的轨道

圆——

- 水塘中激起的波纹
- 圆形的轨道
- 轮子
- 自然界中的物体

阿基米德螺旋装置

当我们把阿基米德螺旋装置浸入水中并旋转摇柄时,它能把水抽上来.现在世界上有不少地方仍然将它用于灌溉.

阿基米德（Archimedes，公元前 287—公元前 212 年）是一位希腊的数学家和发明家.他发现了杠杆原理和滑轮原理.他的发现导致了起重机械（能够容易移动重物）的发明.他还发现了：将物体浸入水中而比较体积的方法，流体静力学，浮力原理，微积分思想的应用；发明了：弩炮，用镜子将太阳光线聚焦的方法，等等.

光渗视幻觉

视幻觉是由于人们的注意力和眼睛的构造两者造成的．当我们观察一个具有明暗对象的区域时，不固定的东西在我们眼睛中是不完全清楚的，光线进入位于我们眼后的视网膜时扩散了．结果明亮的光线或亮的区域便溢出，并渗入到视网膜上影像的暗区．这样一来，亮的区域就显得比同等大小的暗的区域要大一些，就像下图所示的那样．这也解释了为什么穿暗色的衣服，特别是黑的，比起你穿亮丽的衣服或同等式样的白色衣服，会使你显得更为瘦长．这种幻觉称为光渗，它是由 19 世纪德国的物理学家和生理学家赫尔姆霍兹（ Herman L．F．von Hellmholtz，1821—1894）发现的．

毕达哥拉斯定理与伽菲尔德总统

伽菲尔德（James AbramGarfield，1831—1881）是美国第 20 任总统，他对数学怀有浓厚的兴趣．公元 1876 年，当他还是一名众议员的时候，他就发现了毕达哥拉斯定理[①]的一种有趣的证明．该证明发表在《新英格兰教育杂志》上．

证明是用两种方法计算同一个梯形的面积：

方法（1）：梯形面积 $=\frac{1}{2}$（上底 + 下底）×高．

方法（2）：把梯形分为 3 个直角三角形，并计算这三个直角三角形的面积．

证　明

作梯形 ABCD，使 AB∥DC 且∠C 和∠B 为直角，并用 a，b，c 表示有关的长度（见图）．

用上列的两种方法计算梯形面积：

方法（1）面积=方法（2）面积，

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2,$$

$$(a+b)^2=ab+ab+c^2,$$

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,$$

即证得 $$a^2+b^2=c^2$$

① 原注：见“毕达哥拉斯定理”一节.

亚里士多德的轮子悖论

在轮子上有两个同心圆.轮子滚动一周,从 A 点移动到 B 点,这时|AB|相当于大圆的周长．此时小圆也正好转动一周，并走过了长为|AB|的距离．这不是表明小圆的周长也是|AB|吗？

伽利略对亚里士多德轮子悖论的解析：

伽利略是通过正方形“轮子”进行分析的，他考虑的是两个同心的正方形．当大正方形翻动 4 次（横贯正方形轮子的周长|AB|）时，我们注意到小正方形被带着跳过了 3 段空隙．这说明小圆是怎样被带着走了长为|AB|的距离，所以|AB|不能代表它的周长．

史前巨石柱

在英格兰的索尔斯堡大平原上，伫立着令人生畏的石头建筑，它就是闻名于世的史前巨石柱．这些石柱始建于公元前 2700 年，共分三个阶段，最后约于公元前 2000 年完成．

建造这些巨石柱是出于什么目的？居然有那样多不同的人群使用和发展它，这又意味着什么呢？莫非它是：

●一座宗教的寺庙？

●一座月亮和太阳的观测台，用来观察冬至太阳的下落和夏至太阳的升起？

●一种阴历？

●一台预测日食或月食的原始计算机？

然而所有这些，巨石柱的建设者和使用者们都没有写成文字留下来，以致于到今天人们仍无法知道它的真正目的．零碎的证据使所有的论断都处于推测之中．然而有一点却是可以肯定的，那就是建筑者们已经有了关于几何图形和度量方面的知识．

有多少维？

艺术是多种多样的，像早期的山洞壁画，拜占庭时期的偶像画，文艺复兴时期的油画，以及印象派艺术家的描写画，等等，它们的存在要么是二维的，要么是三维的．然而艺术家、科学家。数学家和建筑师们，他们都发展了各自的手法，使一些对象显现为四维．其中一个例子就是称为超立方体的立方体四维画，它是建筑师 C · 布莱顿于 1913 年创造的．布莱顿将他的超立方体画和其他的四维图案汇集在自己的作品中．其中他设计的罗契斯特（在美国纽约州）的商会建筑就是一个例子．

超过三维的其他维的存在，总是引人注目．在一个数学家看来，高维的出现只是遵循思维逻辑发展的一种必然结果．

例如，从一个零维物体，即一个点开始，现在将该点向左或向右移动一个单位，这便形成一条线段，这线段就是一维的物体．现在将线段向上或向下移动一个单位，便会形成一个正方形，这正方形就是二维物体．按同样的方式进行，把正方形向里或者向外移动一个单位，便会形成一个立方体，它就是一个三维物体．下一步要设法并想象移动这个立方体，使其朝第四维的方向运动一个单位，以产生一个超立方体，也称作立方镶嵌体．用同样的方式，人们可以得到超球，即四维球体．但数学并没有停止在四维，而是进一步考虑 n 维．令人惊异的数学图案表现出不同维数物体所涉及的顶点数、边数和面数，有关的资料已被汇编成集．

第四维的可能存在使许多人感到兴趣．艺术家和数学家们试图想象并描画一种物体使其显示出第四维．立方镶嵌体和超立方体都是立方体的四维标本．一个立方体画在纸上其本身也只是一个透视图象（它暗示着三维的特征）．这样一来，一个立方镶嵌体画在纸上，便是一种透视的透视．

计算机与维数

人类是三维生物，所以最容易想象和理解的首先也是三维物体．虽然就数学而言，存在超过 3 的维数，然而对于无法看到或想象的一些东西，人们还是难于接受的．计算机则可用来帮助我们想象高维物体．例如，T·本车夫（一位数学家）和 C·斯特劳斯（一位计算机科学家）在布劳恩大学用一台计算机产生一个超立方体迁入和迁出三维空间的运动图．由此人们可以从不同的角度去捕捉超立方体在三维世界中的各种不同图象．它类似于一个立方体（三维物体）从不同的角度穿过一个平面（二维世界）．把它在平面上的截痕记录并搜集起来，则有助于给出一个三维物体较为完美的二维形象．

现在我们已经有了三维物体的二维全息图．这种全息图现在已用于商品的广告和图示．或许在将来，三维的全息图也将发展并用于四维物体的图象．

你是否考虑过你最要好的朋友是一个四维生物，但他却以三维生物的形象呈现在你的面前？

“双层”莫比乌斯带

拓扑学是研究物体在扭曲变形（拉伸或皱缩）下保持不变的那些性质.与欧几里得几何不同，拓扑学不涉及大小、形状和刚体，它研究的是弹性对象，这就是为什么人们说它是橡皮膜上的几何学.莫比乌斯带是 17 世纪德国数学家 A·莫比乌斯创造的，它是拓扑学研究的对象之一．取一张纸条，把它扭转半圈并将端头胶接在一起，一个莫比乌斯带便做成了．它是令人迷惑的，因为它只有一个面，我们能用一根铅笔笔不离纸地描遍整个表面.

下面让我们考虑“双层”的莫比乌斯带．取两张叠在一起的纸条，把它们同时扭转半圈，然后把端头胶结在一起．整个看起来像是两条紧贴在一起的莫比乌斯带．然而果真是这样吗？

请做一个像上图那样的模型并检验一下：把你的手指放进两条带的中间隔层并让它移动，看会发生什么情形？再拿一支铅笔沿其中一条描画直至到达你出发点的背面，看又会发生什么情形？

如果你试着不让它们紧贴，又会发生什么呢？

似非而是的曲线——充满空间的曲线

曲线通常是作为一维考虑的，它是由零维的点构成．从这个意义上讲，说一条曲线能够充满空间似乎是与上述矛盾的．欧几里得曲线是平薄而无大小的．

那个时代的数学家还没有想到曲线可以通过以下自我产生的方式构造．

上述例子显示了曲线充满空间的步骤，它由图示的特殊方式连续地自我产生，并逐渐包容了整个立方体空间．

算盘

算盘是一种最为古老的用于计算的发明，也被人称为古代的计算机．这种古代的计算工具最先在中国和其他亚洲国家使用，可用来作加、减、乘、除及求平方根和立方根等计算．算盘有不同的类型，如阿拉伯算盘，在每根金属线上有十个球，没有中隔．历史显示，古希腊和古罗马人也曾用过算盘．

中国人的算盘一般含有十三档算珠，当中由一根横木隔开．每档在横木下方有五个算珠，在横木的上方有两个算珠．每档的一个上珠，等于五个同档的下珠．例如，在十位档上的一个上珠，其值为 5×10 即 50．

数学与编织

数学的对象会怎样出现在编织物中呢？

让我们用数学的观点有意地去分析一些织物的图案．研究以下一些织物的断片，人们会在其中发现许多数学概念

●对称的线条

●镶嵌

●几何的形状

●成比例的对象

●反射图样

在这些织物图案中你能发现上面所列的数学概念吗？你还能从中发现其他的数学思想吗？

默森的数

在 17 世纪，一个具有 69 位数字的数被法国数学家 M·默森推测为素数.1984 年 2 月，一批数学家成功地用计算机解决了这个历经三个世纪的古老谜题.在经过 32 小时又 12 分钟之后,这一默森的数所包含的三个因子(下表列出）终于被发现.

数的分解的技术使应用密码的人感到担忧，因为现代的许多密码系统，为了保持密码的可靠性而选用了一些位数很大而又难于分解的数作为设密的工具.

分解一个数是指把数分为较小素数的乘积．这项工作对于较小的数可用小于它的素数来试除，因而比较简单．但对于较大的数，则需要其他办法．这是因为随着数的增大，前述方法的计算量将指数般地增加．对于一个有 60 位的数，即使用每秒运行 10 亿次的计算机，也要花上几千年.

1985—1986 年，R·西韦门和 P·曼特哥美利发展了一种既快又廉价的方法．该法用在微电脑上与用在大型计算机上效果相当．他们新近完成了一个 81 位数的因子分解，用了八台微电脑，每台运行 150 小时.

七巧板谜题

用一副七巧板的七块板，如何拼出下面的图形？

无限对应有限

下图显示如何使半圆上的点与一直线上的点一一对应．这里半圆的周长 5π 是一个有限的长度，而切于半圆的直线却有无限的长度．由半圆中心 P 发出的射线与直线和半圆分别相交，两个交点之间形成一一对应．当射线沿半圆移动并逼近射线 PQ 时，它与直线的交点变得越来越远．

当射线变为 PQ 时[①]会发生什么情况呢？

[①] 原注：此时射线平行于直线．

三角形数、正方形数与五边形数

人们对给出的数予以许多不同的称呼，其中有些名称是来自它们构成的几何对象的形状．

下面我们看到，奇数[①]构成三角形的形状，因而也称三角形数．完全平方数，即 12＝1，22＝4，32＝9，……构成正方形的形状，每一组数都跟一种图样相联系．试构成其他数的序列，使其联系于某几何对象，并确定其特殊的图样．

[①] 译者注：这里把 1，3，6，10，…等数说成“奇数”（oddnumbers）似乎有误.

埃拉托斯散测量地球

公元前 200 年，埃拉托斯散设计了一种测量绕地球一周距离的巧妙的办法．

为测出绕地球一周的长度，埃拉托斯散运用了几何知识和以下定理：

两平行直线为另一条直线所截，则所形成的内错角相等．

他知道在塞恩（埃及城市）每当夏至中午时分，直立的杆没有影子，而此时 500 英里外的亚历山大里亚直立的杆，其影子却偏离垂直方向 7°12′角．根据这一信息他算出了绕地球一周的长度．计算结果与实际值的误差小于 2%．

程序：

由于光线是平行照射的，所以上图中内错角∠CAB 与∠B 相等．这样，在塞恩和亚历山大里亚之间的距离，便是绕地球一周距离的若干分之一．这个比的分数为$\frac{7°12'}{360°}=\frac{1}{50}$.因此绕地球一周的距离便是500英里X50＝25000英里.

投影几何与线性规划

运用投影几何和解方程组的技巧，一位贝尔实验室的数学家 N·卡马克发现了一种快刀斩乱麻的方法．这种方法可以用来解决非常繁杂的线性规划问题，这类问题经常出现在卫星通讯的时间分配，大队飞机的起降编排，以及数百万部长途电话的发送，等等．

直至新近，数学家 G·B·丹齐克所发展的单纯形法[①]（1947）仍然有用．不过，对于巨型问题，即使使用大型计算机也要花费很多时间，因而显得不够实用．数学家们把这类问题想象成一个复杂的几何体，这个几何体有千千万万个的面，每个面上的每一个角顶都表示一种可能的解．算法的任务就是在不去计算每一个解的情况下求出最佳的解答．丹齐克的单纯形法则是沿着体的棱，逐一检验顶点，以求取得最佳解．在大多数问题中，只要未知量不多于 15000 至 20000 个，用这种方法处理都足够有效．

卡马克算法[①]总的思路是，通过体的中央取一条捷径．在选定任一内点之后，通过算法使内部的结构变形，也就是说形成了新的问题，在新问题中所选的点准确地成为中心．下一步是在最佳解的方向上找一个新的点，然后再次变形结构，使新的点此时成为中心．除非变形已经结束，否则都要继续同样的步骤，每次都往最好的方向改进．这种一再施行的变换是基于投影几何的概念，它能迅捷地导出最佳的解答．

[①] 译者注：单纯形法最早是前苏联数学家康多罗维奇于 1939 年提出的．康多罗维奇还因在运筹学上的贡献而获得了 1975 年诺贝尔经济学奖．文中所提到的 N·卡马克算法，数学界普遍把这一成就归属于前苏联青年数学家哈奇扬．哈奇扬的算法也称‘椭圆算法”（1979）．

[①] 原注：算法是一种达到解答的计算步骤．例如，长除法的过程和步骤就是一种算法．在长除法中，我们需要靠智力在算的过程中取一个捷径．如我们用 29 去除 658，人们会想 29 接近 30，那么在 65 中有几个 30 呢？这比算出在 658 中有多少个 29 便捷得多，几乎可以立即得出答案．卡马克算法也是一种特有的捷径，它是建立在变换和变形的基础上的．

蜘蛛与苍蝇问题

H·E·杜登尼是19世纪英国知名的谜题创作者．在今天大多数的谜题书上都有他的杰作，只是他常常没有得到他应有的赞誉．公元1890年，他与美国著名的谜题专家山姆·洛依德合作发表了一系列谜题文章．

杜登尼的第一本书《坎特伯雷谜题集》出版于1907年，此后又陆续出版了五本，它们为数学智力问题留下了一笔财富．

“蜘蛛和苍蝇”问题最早出现在1903年的英国报纸上，它是杜登尼最有名的谜题之一：

在一个 30′X 12′ X 12′的长方体房间，一只蜘蛛在一面墙的中间离天花板1英尺的地方．

苍蝇则在对墙的中间离地板1英尺的地方．苍蝇是如此害怕，以至于无法动弹．

试问，蜘蛛为了捉住苍蝇需要爬的最短的距离是多少？（提示：它少于42′）

（见附录“蜘蛛与苍蝇”的解答）

数学与肥皂泡

哪一类数学概念与肥皂泡相联系呢？肥皂泡膜的形状是受表面张力的控制．表面张力总是使表面积尽可能地小．由于每个肥皂泡里都包封住了一定量的空气，结果由于这一定量的空气，使得表面积的减少有了一个最低的限度．这就解释了为什么单个的肥皂泡总是变成球状的，而一大堆肥皂泡集在一起便有不同的造形．在肥皂泡沫中，肥皂泡的边缘之间交成 120°，这称为三部接合．在一个三部接合点，有三条线段相会，各各交成 120°角．许多自然现象（一些例子如鱼的鳞、香蕉的内部、玉米仁的构造、海龟壳等等）也都遵从三部接合的规律，接合点则为自然界的均衡点．

硬币悖论

顶上的硬币绕下方的硬币移动半圈，结果硬币中图案的位置与开始时一样，然而滚过圆周的一半，人们原以为结果图案会是朝下的！

拿来两枚硬币并试照着移动．你能解释为什么不会出现朝下的情形吗？

六阶米诺

六阶米诺片是一种扁平的物体，它由六个正方形单位构成．取一个体积为 1 立方单位的立方体,沿着它 12 条棱中的 7 条将它切开,然后把它摊平.其结果的图形就是一种六阶米诺片．由于沿着棱切开可以有多种方式，所以得到的六阶米诺片就会有许多不同的形状，下面画的就是其中几种．

那么究竟有多少种不同形状的六阶米诺片呢？

斐波那契数列与自然

斐波那契数列在自然界中的出现是如此地频繁，人们深信这不是偶然的．

a）细察下列各种花，它们的花瓣的数目具有斐波那契数：延龄草、野玫瑰、南美血根草、大波斯菊、金凤花、耧斗菜、百合花、蝴蝶花．

b）细察以下花的类似花瓣部分，它们也具有斐波那契数：紫宛、大波斯菊、雏菊．

斐波那契数经常与花瓣的数目相结合：

3………百合和蝴蝶花

5………蓝花耧斗菜、金凤花、飞燕草

8…………翠雀花

13…………金盏草

21…………紫宛

34， 55， 84…雏菊

C）斐波那契数还可以在植物的叶、枝、茎等排列中发现．例如，在树木的枝干上选一片叶子，记其为数 0，然后依序点数叶子（假定没有折损），直至到达与那片叶子正对的位置，则其间的叶子数多半是斐波那契数．叶子从一个位置到达下一个正对的位置称为一个循回．叶子在一个循回中旋转的圈数也是斐波那契数.在一个循回中叶子数与叶子旋转圈数的比称为叶序(源自希腊词，意即叶子的排列）比．多数的叶序比呈现为斐波那契数的比．

d）斐波那契数有时也称松果数，因为连续的斐波那契数会出现在松果的左和右的两种螺旋形走向的数目之中．这种情况在向日葵的种子盘中也会看到．此外，你能发现一些连续的鲁卡斯数[①]吗？

e）菠萝是又一种可以检验斐波那契数的植物．对于菠萝，我们可以去数一下它表面上六角形鳞片所形成的螺旋线数．

斐波那契数列与黄金比值

相继的斐波那契数的比的数列

$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\Lambda\ \frac{F_{n+1}}{F_n},\Lambda$

1,2,1.5,1.6,1.6,1.625,1.6153,1.619…

它们交错地或大于或小于黄金比φ的值．该数列的极限为φ．这种联系暗示了无论（尤其在自然现象中）在哪里出现黄金比、黄金矩形或等角螺线，

[①] 原注：鲁卡斯数构成一个类斐波那契数列，它起于数 1 和 3，其后继数可由前两个数相加得到．这样，鲁卡斯数列便是 1，3，4，7，11，…．这个名字是 19 世纪数学家后来命名的，他们在研究斐波那契再生数列时，给鲁卡斯数列命了名．鲁卡斯数列还可以直接从它与斐波那契数列之间的关系得出．

那里也就会出现斐波那契数，反之亦然.

猴子与椰子

三名水手和他们的一只猴子因船舶失事而流落在一个岛上，在那里他们发现仅有的食物是椰子．他们为收集椰子而劳累了一天，于是决定大家先去睡觉，等第二天起来后再分配．

夜间，一个水手醒来，决定拿走属于他的那份椰子而不想等到早上．他把椰子分为相等的三堆，但发现多出了一个椰子，于是把这个多出的给了他们的猴子．接着他藏好了自己那份椰子又去睡觉了．不久，另一个水手也醒来，他做了与第一个水手同样的事，也把此时正好多出来的一个椰子给了猴子.而最后第三个水手醒来，他也跟前两个水手一样做法分了椰子，并把此时多出的一个给了猴子．早晨，当三名水手起来时，他们决定为猴子留下一个椰子后把其余的椰子平分为三堆．

试问，水手们收集到的椰子最少的数目是多少？

试将同样的问题推广到四个和五个水手．

用于解这个问题的方程称为丢番图方程．希腊数学家丢番图最早把这种类型的方程用于解特定类型的问题．

（见附录“ 猴子与椰子 ”的解答）

蜘蛛与螺线

四只蜘蛛从一只 6×6（单位米）正方形的四个角开始爬．

每只蜘蛛都以每秒 1 厘米的速度朝它右边的一个蜘蛛爬．结果它们都以一定的速率朝中心移动．四只蜘蛛总是位于一正方形的四个顶点．

多少分钟后它们会在中心相遇？

蜘蛛所走的路线形成等角螺线①．试对其他形状的正多边形思考同样的问题．

（见附录“ 蜘蛛与螺线 ”的解答）

附录：

解答·答案·说明

●第 9 页——三角形变为正方形：

●第 17 页——麦粒与棋盘：

$1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}$

$1+2+4+8+16+\cdots$

●第 36 页——T 问题：

●第 38 页——无穷旅店：

他决定将每个房间的居住者搬到房号是他现有房号两倍的房间里去．即第一号房间的客人去第二号房间，第二号房间的客人去第四号房间，第三号房间的客人去第六号房间，等等．这样一来，他空出了所有奇数房号的房间，留给无限公共汽车运载来的旅客．

●第 48 页——山姆·洛依德谜题：

从中心开始依以下所指的方向移动到相应的方格：

南西、南西、北东、北东、北东、南西、南西、南西、北西．

●第 52 页——斐波那契的秘诀：

如果 a 和 b 表示头两项，则接下去的项为 a＋ b；a＋2b；2a＋3b；3a＋5b；5a＋8b；8a＋13b；13a＋21b；21a＋34b．易知，头十项的和为 55a＋88b，它是第 7 项 5a＋8b 的 11 倍．

●第 57 页——十个历史日期：

1879——爱因斯坦诞生；

1066——哈斯丁斯战争；

476——罗马的陷落；

1215——英国大宪章通过；

1455——古腾堡《圣经》印制；

563——浮屠佛出生；

1770——贝多芬诞生；

1969——人类登上月球；

1948——甘地被暗杀；

1776——美国独立宣言发表．

●第 60 页——枕边问题之八：

卡洛尔的解析——

m=人数，

k=最后一个人（最穷的人）身上的先令数．

在一轮之后，每人都比原来少了一个先令，而移下去的一堆则有 m 个先令．k 轮之后，每个人少了 k 先令，此时最后一个人身上已无先令，他转下去的一堆含有 mk 先令．上述过程在以下情况下结束，即当最后一个人收到转来的这堆共含有（mk+m-1）先令．此时最后一个人的前一个人身上已无先令，第一个人则有（m－2）先令．

第一个人与最后一个人是仅有的两个，其拥有先令数的比可能为 4：1 的相邻的人．这样，

要么 mk＋m-1＝4（m-2），

要么 4（mk＋m－1）＝m－2．

第一个方程给出$mk = 3m - 7$，即$k = 3 - \frac{7}{m}$，它除$m = 7$和$k = 2$之外没有其他整数解．

第二个方程给出 4mk＝2－3m，它没有正整数解．

于是，问题的答案是：

7 个人；最后一人开初有 2 先令．

●第 70 页——令人惊奇的跑道：

证明

跑道的面积是——$\pi R^2 - \pi r^2$．这是大圆面积与小圆面积的差．

从69页图知，弦的长度为$2\sqrt{R^2 - r^2}$．以此弦为直径的圆的面积为；

$\pi(R^2 - r^2)$，此即$\pi R^2 - \pi r^2$

●第 71 页——波斯人的马：

两匹水平放置的马，腹部对腹部；两匹垂直放置的马，背部对背部．

●第 72 页——山姆·洛依德的驴：

●第 120 页——阿基里斯与乌龟：

阿基里斯在$111\frac{1}{9}$米时赶上乌龟．如果比赛的路程比这短,则乌龟胜;如果恰好等于上述的距离，则双方平分秋色；否则阿基里斯就要超过乌龟．

●第 127 页——丢番图之谜：

设 n 代表丢番图活的岁数，则：

$$\frac{n}{6} + \frac{n}{12} + \frac{n}{7} + 5 + \frac{n}{2} + 4 = n$$

化简得：
$$\frac{3}{28}n = 9,$$
$$n = 84(\text{岁})$$

●第 140 页——棋盘问题：

不可能用多米诺牌覆盖题中差缺的棋盘．

一个多米诺牌必须占据一个白色和一个黑色的方格．由于两角拿掉的是同一种颜色的方格，这样必然会有白色或黑色的方格留下来．

●第 144 页——1=2 的证明：

第 6 步出现除以零的情形．这是因为数零隐藏于表示式 b-a 之中，当 a＝b 时表示式 b-a 等于零．

●第 151 页——预料不到的考试的悖论：

考试不可能在星期五，因为它是可能举行考试的最后一天，如果在星期四还没有举行考试的话，那你就能推出星期五要考．但老师说过，在当天早上八点之前不可能知道考试日期，因此在星期五考试是不可能的．但这样一来星期四便成为可能举行考试的最后日期．然而考试也不可能在星期四．因为如果星期三没有考试的话，我们就知道考试将在星期四或星期五举行．但

从前面的论述可知道，星期五可以排除，这就意味着在星期三就已知道在星期四要进行考试，这是不可能的．现在星期三便成为最后可能考试的日子．但星期三也要排除，因为如果你在星期二还没有考试的话，便能断定在星期三要考．如此等等，根据同样的理由，全周的每一天都被排除．

●第 163 页——农夫、狼、羊和白菜：

农夫首先将羊带过河，然后返回带狼过河．过河后把狼留下，而将羊带回到原先出发的地方．然后再把羊留在原地而把白菜带过河．再把白菜留在狼那边，自己返回．最后又一次把羊带过河，带到狼和白菜等着的地方．

●第 168 页——九币谜题：

●第 180 页——木柴、水和谷物问题：

木柴、水和谷物问题在欧几里得平面是无解的（不管路多长），但女果把房子盖在环面或油煎圈饼表面上（如图所示），那么解答将是很简单的．

●第 187 页——假币谜题：

只要称一次！

从第一堆银币中取一枚放在秤盘上，从第二堆银币中拿两枚放在秤盘上，从第三堆银币中拿三枚放在秤盘上，从第四堆银币中拿四枚放在秤盘上，如此等等．如果其中没有假币，你能算出秤盘上的银币该有多重．因此，如果你发现秤盘上重了多少，就能确定哪一堆是假币，因为堆的序数与拿出的币数是一样的．例如，秤盘上比正常重了 4 克，那么第 4 堆必为假币，因为你从这一堆中取出了 4 个银币放在秤盘上．

●第 196 页——三人面墙问题：

离墙最远的那个人必然看到了两顶茶色的帽，或者一顶茶色的帽一顶黑色的帽．因为如果他看到的是两顶黑色的帽，便能知道自己戴的是茶色的帽．

中间那个人看到的必然是茶色的帽．因为如果他看到的是黑色的帽，他就能从第一个人的回答中知道自己必然戴着茶色的帽．因此面对墙的最前面的那个人便能推出自己只能戴着中间那个人看到的茶色的帽．

●第 224 页——蜘蛛与苍蝇：

●第 232 页——猴子与椰子：

79 个椰子．

令 n 代表原先椰子的数量．

给猴子的数	每个水手自己藏起的数	堆中留下的数
1	$\frac{n-1}{3}$	$\frac{2n-2}{3}$
1	$\frac{2n-5}{3}\div 3=\frac{2n-5}{9}$	$\frac{2(2n-5)}{9}=\frac{4n-10}{9}$
1	$\frac{4n-19}{4}\div 3=\frac{4n-19}{27}$	$\frac{2(4n-19)}{27}=\frac{8n-38}{27}$
1	$\frac{8n-65}{27}\div 3=\frac{8n-65}{81}$	0

回想起$n=$原先椰子的总数，而$\frac{8n-65}{81}=f$是第二天早上每个水手分到的

椰子数．让 f 从 1 开始连续地取整数值，可知要使 n 为整数的最小的 f 值为 f＝7．此时 n＝79，

●第 234 页——蜘蛛与螺线：

注意到蜘蛛移动后所形成的正方形尺寸不断缩小，但它永远留在原正方形内．由于每个蜘蛛走的路都与它右边的蜘蛛走的路相垂直，因而一个蜘蛛到达它右边的蜘蛛所花的时间，与右边的蜘蛛不动时该蜘蛛爬到的时间是一样的．这表明每只蜘蛛都爬行了 6 米，即 600 厘米．蜘蛛爬这段路需要 600 秒，即 10 分钟．