学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

# 科学与假设

BOOK

内部资料 非卖品

# 导　　言

大凡科学的真理，对一位肤浅的观察者是无可怀疑的；科学的逻辑是永固的，至于学者们有时会犯错误，那是因为他们不知其中的规则。

一切数学的真理，是用了一连串正确的推理从少数明显的命题（proposition）推演出来的；不但是我们不得不服从这些真理，就连那自然界本身亦复如是。它们好像能支配“造物者”，只许它在比较上很少的解答中能有所选择。因此我们只要有一些经验，便知道它所选的是什么。从每个经验中，用一系列的数学演绎法便可推出许多的后果，也就是这样从每个后果我们才认识宇宙的一角。

这就是普通一般人，以及略知物理的中学生所想像的科学定理的来源。这就是他们怎样认识实验和数学的作用。这也是百年前许多学者对这作用所懂得的，那时候，他们梦想借用愈少愈妙的实验的材料，来说明世界的结构。

人们试略加思索，就可知假设在科学中所占的位置；人们已知数学家既少不了它，而实验家也少不了它。因此就生出一个疑问：所有这些建筑在假设上的学问是否坚固的，而人们认为它经不起一阵小风便要倾倒的。作这样的怀疑，还是肤浅的见解。怀疑一切，或信仰一切，都是很便利的两种解答，因为两者都可以使我们不用思索。

所以我们对于假设且慢粗浅地加以责难，应该细心观察它的作用；这样我们才能认识它不但是必需的东西，并且它往往是合法的了。我们将见假设可分几种，有的是可以证实的，并且一经实验证明，就成为真理的渊薮；有的不会遗误我们，同时好处在能坚定我们的思想，最后有的只是貌似假设，其实不过是一种伪装的公约或定义而已。

这最后的一种假设大半见于数学及其相关的科学。这些科学正因此而愈形真确；这些公约是我们精神上一种自由活动的产品，它在这一种范围里是无障碍的。在这里面我们的精神可以肯定。因为它能颁布法令；但要知道，这些法令仅可颁行于我们的科学中，没有它们科学将变为不可能：它们不能支配自然界。然而，这些法令是否任意的？不，否则它们将不生效果了。实验固然让我们自由选择，然同时又指示我们以最便利的路径。所以我们的法令如同一专制聪明的太子，要谘询参谋会议后方颁布的法令一样。有人对于在有些科学的基本原则中，这一种自由的公约的特征，引为惊奇。他们曾经想过分地加以推广，而同时忘却了自由非即任意之谓。因此他们就成立了所谓唯名主义。他们自问道，学者是否即他所自造的定义的傀儡，而他所认为发现的世界是否简直就是他的私意所创[①]。在这情形下，科学将或是确实的，但是缺少前途了。

果真如此，则科学将必无能力了。但我们竟见其蒸蒸日上。它如不能使

---

[①] 参阅 M·Le Roy：Science et Philosophie（Revue de Méaphysique et de Morale,1901．）

我们知道些实在的东西，这样是不可能的；但它所能达到的，并不是老实的教条主义者所想的事物的本身，这不过是物与物间的关系而已；除这种关系以外，再没有可知的实在了。

这就是我们将来的结论，然为此我们必须从算术与几何谈起，一直谈到力学与实验物理学。

数学推理的性质是什么？真是我们通常所信为演绎的吗？把它仔细分析一下，可知大为不然，它在某种范围内却带着归纳推理的性质，其所以丰裕亦正在此。但它还保存着不少的绝对精密的性质；这是我们在开始就要说明的。

等到既然弄明白数学交给研究者这一种工具之后，那时我们还要讨论另一基本概念，就是数学量。这是我们可在自然界中找到的呢，抑或是我们所导引进去的呢？又，果真是那后一情况，则我们会不会完全弄错呢？试把我们感觉所得的粗钝数据和那数学家理想中所称呼的极端复杂而微妙的数学量来比较，我们势必承认一种分歧；所以我们想收罗万有的这个框子，原来是我们手创的；然而我们并未偶然做成它，我们可说曾经按照尺寸去做的，因此我们能收进事实，同时又能对事实的主要的东西不加改观。

我们对于世界所支配的另一框子就是空间。几何的基本原理是从何而来？是逻辑学支配我们的吗？罗巴切夫斯基创立了非欧几里得几何学以证明其不然。空间是否由我们的感官得来的？也不是，因为我们的感官所能揭示的，绝对与几何学家的空间不同。几何学是否来自经验？深刻研究之后，可见不然。所以我们结论它的原理不过是一种公约；但不是任意的公约，现在如把它转运到另一世界（我叫它非欧几里得世界，我并且要把它想出来），我们就得采用别的公约了。

在力学中，我们也将得到相似的结论，并且我们将知这种科学的原则，虽然比较直接根据于实验，但还含有几何公设（postulat）的公约性。到此为止，都还是唯名主义占着胜利，但现在我们且看真正的物理学如何。这里情况改变了，我们遇见一些别的假设，并可见其何等的丰富。无疑地，表面看来，理论对我们好像是脆弱的，而它在科学史上，又每如昙花一现，但是它们也不能完全消灭，而每一理论总有所残余。这残余的东西，正是应当清理的，因为正是那儿而唯独那儿，才是真正的实在哩。

物理学的方法是建设在归纳上的，我们借此可知在先前发生过的外界某种境况毕具时，某现象必可重新发生。如所有的这些境况可以如数重现，则这条原理，就可以放心应用了，但这是从来没有过的，其中总有些境况是缺少的。我们可以确信这是不重要的吗？这显然不是的。这也许似乎对的，但这不是确实一定的。由此见得概率的概念在物理学上的作用，是何等的伟大了。所以概率的计算不仅是一种消遣和赌博者的引导，而我们应当深究其原理才行。关于这层，我只能给点很不完备的结果，因为这种使我们辨别真相的空泛的本能很难加以分析。

我以为把物理学家工作的情形研究之后，还要说明他们工作的成绩。因此我就在光学与电学的历史中举了些例子。我们将知弗勒钠耳和麦克思韦的理论何来，以及安培和那些创造这电动力学的学者引用了那一些不自觉的假设。

## 汉译世界学术名著丛书
## 出版说明

我馆历来重视移译世界各国学术名著。从五十年代起，更致力于翻译出版马克思主义诞生以前的古典学术著作，同时适当介绍当代具有定评的各派代表作品。幸赖著译界鼎力襄助，三十年来印行不下三百余种。我们确信只有用人类创造的全部知识财富来丰富自己的头脑，才能够建成现代化的社会主义社会。这些书籍所蕴藏的思想财富和学术价值，为学人所熟知，毋需赘述。这些译本过去以单行本印行，难见系统，汇编为丛书，才能相得益彰，蔚为大观，既便于研读查考，又利于文化积累。为此，我们从 1981 年至 1986 年先后分四辑印行了名著二百种。今后在积累单本著作的基础上将陆续以名著版印行。由于采用原纸型，译文未能重新校订，体例也不完全统一，凡是原来译本可用的序跋，都一仍其旧，个别序跋予以订正或删除。读书界完全懂得要用正确的分析态度去研读这些著作，汲取其对我有用的精华，剔除其不合时宜的糟粕，这一点也无需我们多说。希望海内外读书界、著译界给我们批评、建议，帮助我们把这套丛书出好。

商务印书馆编辑部

1987 年 2 月

# 第一部数与量

## 第一章数学推理的性质

### 一

数学的科学的可能性本身好像是一种不可解决的矛盾。如果这种科学之为演释不过是表面的，则它所有的这种严密而无疑的正确性何由而来的呢？反之，若说它的一切命题都可用形式逻辑的规则相互引出，则数学岂不变成一种庞大的重复语么？三段能不能告人以真正新颖的事物，且如所有必来自同一律，则所有亦必能归入其中。然则充满许多书中的定理的陈述将不过是 A 即 A 的各种弯转的说法而已，这样说人们会同意吗？

自然，所有的推理都可归根到几条公理上，因这是所有推理的起源。假使有人断定这些推理不能化为矛盾律，又如人们也不原认为是一些不能参加数学需要性的经验事实，则人们还有可能把那些推理列入先验的综合判断之中。这样并非解决困难，不过加以洗礼而已。即使到了综合判断的性质对于我们不再神秘的时候，然而那矛盾仍不会消减的，它不过退了一步。三段论推理对于给与它的数据仍是无所添加的，这些数据化为一些公理，而在结论中人们决不能找到别的东西。

无论什么定理，如在它的证明中不参加新的公理，则必不是新的，推理只能借用直接的直觉法给我们直接明显的真理；它好像只是一个寄生的中人，于是人们要不要问那所有三段论的工具是否单单用来遮蔽我们的借用品的？

我们随便展开一本数学书，便知道其中的矛盾令人更为惊奇；著者在每一页里有推广已知的命题的意图。所以数学方法是否由特别而推及普遍，然则何以又说它是演绎的呢？

最后，如果数学是纯粹分析的，或可由少数综合判断分析出来的，则特殊聪明的人一眼就可能看出所有的真理。再说吧，人们甚至可希望总有一天会发明一种简单的言语，来叙述这些真理；使得常人也能一目了然。

人们如不承认这些结果，就要知数学推理的本身有一种创造性，因此它与三段论实有区别。

两者的区别应该是深刻的。譬如将两相等数作同样的均匀运算，便有相同的结果，我们实在不能解释这条常用规则的奥妙。

所有这些推理的形式，不问其可否归入真正的三段论，总保有分析性，而其能力薄弱也正是这个缘故。

### 二

我们现在要讨论的，已是很陈旧的问题了；赖布尼兹已经想证明二加二得四，我们试看他的证法如何。

我假定对数 1 已下定义，又知 x＋1 即加一单位于给定数 x 的运算。

这些定义，无论如何，与推理的进展没有关系。

其次我对 2，3 和 4 用下列等式规定：

（1）1 ＋ 1＝2，（2）2＋1＝3，（3）3＋1＝4，

同样，我用下列式规定 x＋2

（4）x＋2＝（x＋1）＋1。

因此我们有：

2＋2＝（2＋1）＋1，（定义 4）

（2＋1）＋1＝3＋1，（定义 2）

3＋1＝4，（定义 8）

所以：2＋2＝4。（即所欲证）

我们不能否认这个推理是纯分析的。但假使问数学家，他必答曰：“ 这不是真的证明，这不过是一种核验而已 ”。人们仅将这两种纯粹公约性的定义做了一种比较，才知道是相等的；至于新的东西，是一点没有得到核验之所以不同于真的证明，实因它是纯粹分析的，是毫无效果的。其所以无效果，正因其结论只是三段论的两前提之一种译语而已。反之，真正的证明是很丰富的，因为里面的结论在某种意义上是比较前提普遍的。

因此 2＋2＝4 这个等式之所以能被核验，只因它是特例而已。所有数学中的特别定理都可用这方法核验。然而数学如竟成为这样的一串的核验，那它将不成为科学了。例如下棋的人并不显得因为赢了一盘，就发明一种科学。唯有普遍性才成为科学。

人们甚至可说那些准确的科学的目的，正在于免去我们这种直接核验的辛苦。

## 三

我们且看在工作时的几何家，而考察他们所用的方法。

这却不是容易的事；单单任意翻开一本书而分析其中某条证明，这是不够的。

由于几何学中的一些前提的作用以及空间概念的来源与性质等都是难题，我们先当撇开几何学。为了同一理由，我们也不能用到微积分学。我们要去找纯粹的数学思想，也就是在算术中去找。

此外还要选择一下；因为在数论最高深的部分，那原始的数学概念已受了极深的提练，以致难于分析它了。

所以要在算术的初部中，我们才可找到所要的解释，然正是在最基本的定理证明中，显出经典著作的作者用了最不精密而准确的手法。这是不可怪他们的；他们曾受一种必需的束缚，初学者还没有真正数学精密性的训练；他们在那里可能只见到一些空洞的微妙；所以人们如在这上面苛求他们，那不过白费时间；他们要重新按部就班地快点学过的，而这种程序也就是那些科学建设者慢慢地经过了的。

为何要这样长的准备，才能惯于这种完善的精确性，而这好像是聪明人都当赋有的呢？这是一个逻辑与心理问题，大有考虑的价值。

然这是我们题外的事，可不赘述；为不失掉我们的目的，我们要把最基本的定理重新证明，且其形式不当是为免去那些初学者扫兴才粗浅的，而是能够满足已有训练的几何家的。

加法的定义——我假定对 $x+1$ 的运算，即将数 1 加在数 x 上。已先下定义。

且这个定义，无论为何，对于推理的进展，是毫无作用的。

现在我要规定 $x+a$，就是把数 a 加到数 x 上的运算。

假定规定演算法：

$$x+(a-1)$$

则 $x+a$ 的算法可用下式规定：

$$x+a=[x+(a-1)]+1。\tag{1}$$

所以我们如果知道何为 $x+(a-1)$，便知道何为 $x+a$ 因为我在起初已假定人们知道何为 $x+1$，故 $x+2$，$x+3$ 等演算法人们也可陆绩地用循环法规定了。

这个定义值得注意一下，它有一种特别的性质，使它与纯粹逻辑的定义已有所区别；事实上等式（1）包含无穷的不同的定义，其中每一定义必待已知前者之后才有意义。

加法的特性——结合性——我说：

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

盖 $c=1$ 时此定理是对的；因此可写为：

$$a+(b+1)=(a+b)+1,$$

此式除符号差别外与上面规定加法的（1）式相同。

今如 $c=\gamma$ 时此定理仍真，则 $c=\gamma+1$ 时此定理亦真。

盖由 $(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$，

人们陆续引出：

$$[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+r)]+1,$$

或照定义（1）有：

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+r+1)=a+[b+(\gamma+1)],$$

由此可见用了一串纯粹分析的演绎法，证明此定理对于 $r+1$ 亦真。

故 $c=1$ 时既真，则 $c=2$，$c=3$ 等等时，此定理也是真实的。

可换性——（一）我说：$a+1=1+a$。

今如 $a=1$，则此定理显然是真的，人们再可用纯粹分析的推理来核验如 $a=\gamma$ 时为真，则 $a=\gamma+1$ 亦然；但 $a=1$ 时既如此，则令 $a=2$，$a=3$ 等等，也应该如此；人们为表达这事，就说那命题是用循环法证明的。

（二）我说：

$$a+b=b+a。$$

此定理对 b＝1 已证明如上，人们再可用分析法核验如它在 b＝β时为真，则 b＝β＋1 时亦必如是。因此命题用循环法而成立。

乘法的定义——我们用下列等式来规定乘法：

$$a \times 1 = a。$$

(2) $$a \times b = [a \times (b-1)] + a。$$

等式包含无数的定义；一如（1）式；令 a×l 既经规定，则此式亦可陆续规定 a×2，a×3 等等。

乘法的特性——分配性——我说：

$$(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)。$$

在 c＝1 时，人们用分析法检验此式之真；其次检验如在 c＝γ时定理为真，则在 c＝γ＋1 时它也是真的。

这样我们的命题又是用循环法而证明了。

可换性——（一）我说：

$$a \times 1 = 1 \times a。$$

在 a＝1 时此乃显然的定理。

人们可用分析法证明如 a＝a 时,此定理为真,则 a＝a＋1 时它也是真的。

（二）我说：

$$a \times b = b \times a。$$

在 b＝1 时，此定理已经证明。人们可用分析法核验如 b＝β时为真，则 b＝β＋1 时亦真。

## 四

我且把这一串单调的推理停止在这里罢。但正是这种单调最能把那一致而又步步碰到的方法，明白表示出来。

这就是循环证明法。人们先在 n＝1 时建立一个定理，然后指出如它在 n－1 时为真，则在 n 时亦真，于是人们结论它对任何整数也是真实的。

刚才我们已经见过用这方法怎样证明加乘二法的规则，此即代数演算的规则；这种演算是转变算式的工具，所得各种组合之多，远非单纯三段论可比拟；但这仍是一种纯粹分析的工具，它是不能告诉我们一点新东西的。假使数学此外再无别的工具，则在它的发展中很快就要停止；但是它可以重新运用同样的方法，就是所谓循环推理法，因此它仍可继续前进了。

人们若能好好地留意，则可见步步都是这样的推理，而其形式或即如上文所说过简单的，或则多少有所改变的。

这实在是最完善的数学推理，我们当再仔细的去研究它。

## 五

循环推理法的主要特性是在它能包含无数的三段论，而集中在可认为唯一的公式中。

欲明此理，且待我将这些三段论依次说明，它们的排列，让我打个比方，有如瀑布直泻下来。

这自然都是些假设的三段论。

已知在数 1 时定理为真。

但如果对 1 为真，则对 2 亦真。

故它对 2 为真。

但假使对 2 为真，则对 3 亦真。

故它对 3 为真，余依此类推。

由此可见每一三段论的结论可做下一三段论的小前提。

且所有三段论的大前提都可化成唯一的公式。

这就是，如定理对 n－1 为真，则对 n 时亦然。

可见在循环推理法中，人们仅限于陈述第一三段论的小前提，以及含有以一切大前提为特例的普遍公式。

因此这一串永无止尽的三段论可减缩成为几行的语词。

现在可容易明白，有如我已说过的，何故某定理的特别结论可用纯粹分析的方法去核验。

我们如不去证明那定理对任何数时为真，而只要指出好比对 6 为真，那只证明要建立上述瀑布的前五条的三段论；但如我们要证明定理对 10 为真，则需九条三段论；再大的数目，所需的条数更多；然此数无论如何大，我们终可达到目的，而这样分析的核验总是可能的。

虽然，我们无论走得多远，我们终究不能得到一个适用于一切数目的普遍定理——只有它才能作为科学的目的。为此目的则非有无穷的三段论不成，这必须越过那仅仅依靠形式逻辑的分析家的忍耐力还永久填不满的深涯。

起初我曾问过，何以人们想不出一个足够神通的人，他会一眼看穿数学中所有的真理。

现在这个问题是很容易回答的了；棋手能做四步五步的预算，但是无论我们觉得他本领怎样大，他只能准备有限的数目；假使他把这种本事用在算术上，他就不能直接用直觉法看出那普遍的真理；连为求到一最小的定理，他也必用循环法推想出来，因为这是从有限数到无穷数的推理工具。

这工具总是有益的，因其一方面能任我们的意思一跃而升进数级，一方面又能省却极无味而单调的冗长的核验，并且这种核验在事实上也很快地不能实践的啊。然而遇到以普遍定理为目标时，这工具就成为不可少的了，因为用分析核验法，虽不能允许我们达到普遍定理，但能使我们不断地接近它。

人们必定以为我们现在所谈的算术范围与微积分学相差太远了，但是刚才我们已知数学的“无穷”观念的重要作用，少了它便无科学，因为也没有普通的东西了。

## 六

循环推理所依据的判断还可用别的方式表示；例如在无穷个相异的整数中，我们可说必有一数较小于其他各数。

人们可很容易地由这一陈述推到另一陈述，而自觉貌似已经证明了循环推理的合法性。

但照这样做下去，人们终必被阻挡着，而必未到一个不可证明的公理，而这公理实即待证的命题的另一说法罢了。

所以循环推理的规则，决不能变为矛盾原理，这是谁也不能否认的结论。

这条规则又不是从实验上得来的；实验所能告诉我们的，不过说这规则好比对数十或首先一百个数为真，但不能推到一串无穷尽的数目上去；只能推到这一串数或多或少的但总是有限止的部分。

但是，如所有的问题，只是这点，则用矛盾律已足济事，它可使我们推演无论多少的三段论，然其所以失败，只在于想把无穷的三段论纳入唯一的公式中，只在正对着无穷时，也正因此连经验也无力量了。这条规则，既非分析法所能证明，而又非经验所能核验的，正是先验的综合判断的实例。人们又决不可在这里好似对于少数几何的前提认为这是一种公约。

然则我们何故势必服从这种判断，有如金科玉律呢？原来这不过是表现精神力量之伟大，它能断定假使某种动作一次可能，则同一动作又可重复无穷次。精神对这种强大的力量具有一种直接的直觉，而经验不过是给它一种利用的机会，因而能够有所领悟。

然有人说：如那粗糙的实验不能证明循环推理之合法性，那么助以归纳法的实验，仍是一样吗？我们陆续看到某定理对 1，2，3 等等数都真的时候，于是我们可说那定律已显然成立,正如那些以极多数但有限的观察为根据的一切物理学定律一样有效。

我们要认明其中有与通用的归纳法酷似之处。然而也存在着主要的区别。应用在物理科学中的归纳法总是不确实的，因它是建立在宇宙有普遍的程序的信仰上的，但这种程序是超人的。反之数学归纳法或即循环证明法是必然支配着我们的，因为它只是精神本身的一种特性的肯定啊。

## 七

我已经说过数学家极力想把他们所得的命题推广起来，而我不必另找例子，就照刚才已证明的等式：

$$a+1=1+a,$$

其次我又曾用以求得等式：

$$a+b=b+a,$$

此式当然较为普遍。

所以数学也可像别的科学，从特殊推到普遍。

这件事在我们以前开始这个研究时，好像是不可了解的，然自刚才我们发现循环证明法和通用的归纳法的相似点以后，我们就觉得其中再没有什么神秘的了。

无疑地，数学的循环推理与物理的归纳推理，两者的基础虽各有不同，但两者的步趋，却是平行一致的，向一个方面走的，换一句话说，两者都是从特殊推到普遍。

我们试再仔细地讨论一下。

为要证明等式：

（1）　$a+2=2+a$，

我们只需应用两次下列规则：

$$a+1=1+a,$$

且演算如下：

（2）$a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a$。

从（1）式用纯粹分析的方法演绎出来的（2）式并不是一简单的特例：它是另一回事。

所以人们甚至不能说：在数学推理的真正分析与演绎的部分是照普通的字义说由特殊而进于普遍的。

（2）式之两边不过是（1）式之两边较繁的组合，而分析的用处只是把其中的元素分开而研究它们相互的关系。

所以数学家用“建筑的方法”而“建筑”那些逐渐繁复的组合。他们再用分析的方法，从这些组合，从可说这些集合回到其中所含的原始元素，他们乃知这些元素间的关系，而由此推想到这些集合本身间的关系。

这却是一种纯粹的分析步骤，但这不是由普遍进于特殊的步趋，因那些集合当然不能认为比较元素更为特殊。

人们对于这种“建筑”的方法曾予以注意，这是很对的，而且人们认为这是准确科学进步的必需与充足的条件。

这个方法是必需的，不错，若就以为充足了，那还不见得咧。

如要一种建筑是有益的，不是徒耗心血的，而且是可以助人向上的梯阶，则第一要有一种统一性，使人不见其徒为元素的堆叠而已。

说一句正确的话，就是要使我们觉得考虑这种建筑品比较考虑它的各元素本身为有益。

这益处何在？

例如为什么对总是可以分成多数三角形的多边形来推想，而不对这些三角形去推理呢？

此因有任何数边的多边形有些特性是人们可以证明的，证明以后，人们便可直接应用此理于任何特别的多边形。

反之，若直接去研究那些由多边形分成的三角形间的关系，往往要费许多心力才能发现这些特性。倘若我们已知普遍定理，那就省力多了。

所以一建筑之有益与否，是在其能否与其他相似的建筑并列，成为同一种的各类。

假使说四边形不仅是两个三角形的叠合物，那正因它是多边形的一种。

并且还要能够证明同一种的特性，而不必对每一类的特性一一证明。

为要达到这步，则必须经过一级或多级的路程，从特殊升到普通。

这种“ 用建筑 ”的分析法，并不迫使我们从上面走下来，而让我们站在同一的水平线上。

我们只能用数学的归纳法，才能上进，只有它才能告诉我们新鲜的事物。如果没有那种在某些方面有别于物理归纳法但同样有效的数学归纳法的协助，则建筑就无力去创造科学了。

最后，请注意这种归纳法的可能成立，全在于同一的演算可重复无穷次。所以棋战决不能成为一种科学，因为同一盘棋各子的走法是不相同的。

## 第二章　数学量与实验

人们如要知道数学家的所谓连续统究作何解，这是不应向几何学来提问的。几何家多少总要表现他所研究的图形，然他的表象只是他的工具而已；他研究几何时，少不了要用广延对象等，正如他用粉笔来表示；所以人们对于那粉笔的画线所生出来的小弯曲之无足轻重，正如他所用的粉笔之为白色一般。

至于纯粹的分析家就不怕这个缺点。他把数学中一切与它无关的元素取出，而他能回答我们的问题：数学家所推想的那连续统，真是什么呢？许多对本行会用心的数学家早已解答此题；譬如在丹勒利所著的“含一变数的函数论导引”一书中已可见得了。

我们先自整数排列谈起；今在二相续的整数中加入一个或多个的中间数，再在二相续的新数中加入中间数，如是依次类推以至无穷。由是乃得无穷的数项，此即所谓分数，有理数，或可约数。然此尚不足；在这些已经是无穷的数项中，当再插入所谓无理数或不可约数。

在未更进一步以前，我们先要注意一事。就是这样想出来的连续统，不过是按着一定顺序排列成的个体的集合，虽是无穷，但是彼此排斥的。这里不是普通观念，假定在连续统的元素之中有一种使成为整体的密切关系，认为不是点成立于线之先，而是线反先于点。从那著名的公律，即连续统者，乃是多样性的统一，人仅见多样性存在，而不见统一。分析家照他们那样规定连续统也有他的道理，因为自从他们追求严密性，他们一直是站在那上面来推理的。然由此已可见真正的数学的连续统实与物理家和形而上学家的连续统有天壤之别了。

人们也许说数学家倘仅以此定义为满足，则无异做字的傀儡了，他们当详细说明那中间数项究为何物，说明他们的插入法，并且证明这样作是可能的。然这样便错了，在他们的推理中，这些中间数项的唯一特性[1]是在它们的前后排列的特性；所以也唯有这特性才可加入定义中。

因此人们可不必顾虑那些中间数项的插入的方式；另方面谁也不会怀疑这作法是可能的，除非忘记这最后字用几何家的话简直就是无矛盾的意思。

虽然，我们的定义尚未完善，我将在这长段插话之后补说。

不可约数的定义——柏林派数学家，特别是克龙勒克先生，他毫不借用别的什么材料，只用整数来从事建设那分数和无理数的连续排列。照这样看来，数学的连续统将不过是精神的纯粹创造品，与经验毫不相干的了。

他们对于有理数的概念，似乎并无困难，他们主要极力想求出不可约数的定义。然在未介绍他们的定义以前，我当加一声明，以免那些不熟悉几何学家的习惯的记者的惊奇。

---

[1] ①以及包含在特别的公约中的特性，这些公约是用以规定加法的，而是以后要说的。

数学家所研究的不是物，而是物与物间的关系；只要物与物的关系不变，则物虽变易，他们也不关心。物质对他们是不重要的，使他们感兴趣的只是物的形式。

倘若人们不记得这事，就不会懂得杜德金先生把不可约数用一种符号来表示，这与一般信为并且几乎可测量而可感数量观念，大不相同。

现在且看杜德金的定义是什么：

可约数可按照无穷的方法分为两排，它的条件便是凡第一排的任何数必较大于第二排的任何数。

有时第一排中有一数较小于其他各数；例如将一切大于 2 和数 2 本身数排在第一排，又把一切小于 2 的数排入第二排，则显然 2 是第一排的最小数，此理甚明。所以数 2 便可作为这种分配的符号。

反之，也许在第二排中有一数大于其他各数；例如将凡大于数 2 排入第一排，将 2 和一切小于 2 的数排入第二排。这里，数 2 还是可作为这种配置的符号。

然有时也许在第一排中，无一数小于其他各数，以及在第二排中无一数大于其他各数。例如将平方较大于 2 的一切可约数排入第一排，将平方小于 2 的一切数排入第二排，大家知道这里没有一个平方适为 2 的数。在第一排中显然无一数小于其他各数，因为尽管某数的平方接近于 2，人们总还可以找到别一个可约数，而其平方更接近于 2 的。

照杜德金的看法，不可约数$\sqrt{2}$不过是可约数特别分配的式样的符号而已；而在每一分配的方式中，相应地必有一可约数或不可约数来做为符号。

但这就算满足，那就未免太不顾到这些符号的来源了；此外尚须说明为什么人们会给这些符号一种具体的存在，而在另方面，对于分数不就开始有困难了吗？如在事前，我们不知道一种可认为无穷尽分割的物质，亦即一种连续统，则我们还会有这些数的概念吗？

物理的连续统——人们到此就要问数学连续统的观念，是否简单地由于实验而来的。果然如是，则实验的粗糙的数据——这就是我们的感觉——将是可被测量的了。人们可能相信这是对的，因为近年来有人努力去测量，并且还发明了一个定律，名曰费希勒定律，而根据这个定律感觉与刺激的对数成正比例。

然而我们如再仔细考察那定律所根据的实验，则所得结论必将大为不然。例如人们觉得曾观察过 10 克重的 A 物和 11 克重的 B 物，两者产生同一的感觉，而 B 物的重量，在感觉上又无别于 12 克重的 C 物，但人们对于重量 A 与重量 C 的差别就容易区别出来。所以实验所得的粗糙的结果，可用下列关系表示：

$$A=B,\quad B=C,\quad A<C。$$

这些式子可认为物理的连续统的公式。

这里和矛盾律有一个严重的不符合，我们认为有消除这一困难的必要，

因此才不得不发明数学的连续统来。

所以人们势必结论说这种观念是精神一手创造的，但这也是实验所提供它的机会。

我们不能相信等于同一第三物的两物会互不自相等的，正因此我们才来假定 A 有别于 B，而 B 有别于 C，但因我们感官的不灵，所以不能辨别它们。

数学连续统的创造——

第一阶段——迄今为止，为说明事实起见，我们可能只要在 A 与 B 中任意插入少数保持离散的数项。我们如利用一种工具，来补助我们薄弱的感官，例如显微镜，那就怎样呢？刚才不能辨别的数 A 和数 B 两项，现在对我们似有分别了；但在已经区别的 A 与 B 中将又加入新 D 项，又无法把它来同 A 和 B 区别了。尽管用最改进的方法，那由实验得来的粗糙结果总表示一种物理的连续统特性，同时带着内在的矛盾。

非得在已经辨别出来的数项中，不断地插进新的数项，而且这个工作当无穷尽地继续进行下去，我们才可避免那事。除非我们能想像一种极精密的仪器能把物理的连续统分成离散的元素，好比用天文镜测视天河，分出无数的小星一样，否则我们不会想到要停止这种工作的。但我们不能理想到这个；因为我们总是靠感官来用仪器，譬如用眼睛窥视显微境放大的物像，因此这种物像总含有一种视觉的性质，因而含有物理连续统的特性。

直接看到的一种长度，和经显微镜放大一倍的半长度是毫无分别的。全部的东西和它的部分是同质的，这又是一种新的矛盾，或者说是这样的，倘若数项是假定有限的；事实上因一部分所含的数项显然较少于全部，所以部分是不能和全部相似的。

一待数项认为无穷多，则矛盾消失；例如整数集合尽可认为与集合中的一部分的偶整数集合相似；事实上，每一整数对应着一偶整数，这偶整数即该整数的二倍。

但这不仅是为了避免这个含在实验数据中的矛盾，精神才来用无限的数项来创造一连续统的概念。

此中情形正与刚才整数串连中发生的一样。我们有能力设想一单位可加入于一团的单位中；这完全是靠经验，才使我们有机会练习这种能力，于是习惯成自然；但从这时起，我们觉得我们的权力是无限的，且可无穷地数下去，虽然我们所数的一向只是有限数的东西。

同样，一等我们在一级数中的相续的两数中插入平均数，我们就觉得这种工作可以继续至于无穷，且可说毫无内禀的理由足以使我们停止的。

为言语简便起见，且让我规定凡是按照可约数的排列定律所组成的整个数项集合叫做第一级的数学的连续统。今如在那里面再按照不可约数的组成定律，插入新数项，则我们可得所谓第二级数学的连续统。

第二阶段——我们还只走了第一步；我们已经说明一些第一级连续统的来源；然现在要知道何以那些还不足，而何以要发明不可约数。

人们试想像一根线，它便不得不含有物理的连续统的特征，就是说须联想到那根线具有一定宽度才能把它表象出来。所以两线就好像是两条很窄的带子，且如满足于这样粗糙的想像，则显然两线交叉时，必有公共占据的一部分。

然而纯粹几何家作了更大的努力：他虽一方面不全然脱离感官的帮助，然他想达到一种无宽狭的线，与无大小的点的概念。为此目的他只有把线认为惭形收窄的最后限度，点是面积渐形缩小的最后限度。所以我们那两条交叉的线，无论怎样细而窄，总有一共同的面积，条子愈细，面积愈小，而它的限度即几何家所谓点子。

因此之故，人们说两线相交必有一共同点，而这个真理似乎是直觉的了。

然如人们把线看作第一级连续统，即如在几何家所画的线上只有用有理数的坐标的点子，则这个真理未免含有矛盾了。这个矛盾将是很明显的，如人们肯定圆与直线的存在。

事实上，显然地，如只认以可约数为坐标的点子是实在的，则内切于正方形的圆和这正方形的对角线将不能相交，因为相交点的坐标是不可约数。

这样还不够，因为这里仅有少数是不可约数，而非完全是不可约数。

今试把一直线分为二条半直线。每一半直线可认为一定宽的条子；则这两条子互相搭叠，因在它们之间不应有间隙。它们的共同部分可认为一点，倘若我们理想那条线愈缩愈细，以至把它分作两截时，它们的共同交接点，仍只一点，这差不多是直觉的真理；这里我们就遇到克龙勒克先生的观念了；他认为凡一不可约数可视为两排有理数的共同交界。

这就是第二极连续统的来源，它是真正的数学连续统。

撮要——撮要言之，精神有创造符号的能力，因此它能建设数学的连续统，而这不过是一些符号的特别系统而已。只是为了免去一切矛盾，它的权力才是有限制的；然精神如无经验给它以理由，刚也不会用它的。

在我们所讨论的情形中，这种理由就是从感觉的粗糙的数据中引出的物理连续统的概念。但这概念未免牵及许多矛盾，而是要依次免除的。因此我们势必想出渐趋繁复的符号系统。至今，我们所说到的系统，不仅无内在的矛盾——这正如上面我们已经过的各阶段一样——且与那些所谓直觉的命题不生矛盾，这些直觉的命题是从多少经过提炼的经验的概念中引出来的。

可量的数量——迄今为止，我们所研究的量都是不可测量的；固然，我们能说这量比那量或大或小，然不能说到底大几倍或小几倍。

事实上，至今我只研究了数项排列的顺序。然在应用上这是不够的。我们要学习来比较任何二数项间的间隔。必须有了这个条件，连续统才变成可量的数量，而算术的运算也就可应用上去了。

这事又非有一种新的与特别的公约帮助不成。人们将公认在 A 和 B 两数项间的间隔等于 C 和 D 两项间的间隔。例如我们曾在上文以整数级排列为起点，又曾假定在相继的两项之间夹以几个中间项；那么这些新数项照公约将

认为等距离的了。

这里是对两数量的加法下定义的方式；因为假使照定义 AB 间隔等于 CD 间隔，则 AD 间隔照定义将是 AB 加 CD 之和。

这个定义是大有任意性的。但也不完全是的。因它服从某种条件，例如它服从加法的结合律与可换律。然只要所选定的定义适合这些定律，则选择就无所谓，而无庸去把它十分明确化了。

各种注意——我们可以提出几条重要的问题来讨论。

一、精神的创造力是否由于数学的连续统的发现而告竭尽了呢？

不；斗布畦乃蒙先生的著作明显地证明了这点。

大家知道数学家能区别各级的无穷小，第二级的无穷小不特是绝对的无穷小，且对于第一级无穷小也是无穷小的。我们不难想像一种分数级的甚或无理数级的无穷小，于是我们又寻得数学的连续统的尺度，而这正是我们在前几页所讨论的对象。

但还有别的事情哩。有些无穷小对于第一级无穷小是无穷小，但对于第 1＋ε 级的无穷小，反而是无穷大，不问 ε 小得如何。这就是在级数中我们插进的新数项，且如照刚才我所用过的虽不大通行但还方便的言语，我可说人们又创造了一种第三级连续统了。

我们本不难追求下去，但将是无谓的精神玩意儿；且想出来的符号，将无应用之可能，而无人要去注意的。由对讨论各级无穷小而引出的第三级连续统本身已少实用而无地盘，而几何学家对它不过认为是一种简单的好奇而已。人们的精神受经验的必要性的支配，才施展他的创造技能。

二、既有数学的连续统的概念之后，人们就可免去有如产生这概念的矛盾否？

不，让我来举例说明。

必须是很通博的人才觉得凡是曲线不必显然要有一切线。事实上，如果人们认为曲线和直线是极细的两条带子，人们总可使它们有一共同的小部分碰到而不相交。然后我们再想像这两条带子缩小以至于无穷细，则二者共同的部分永远可以存在，等到了可说是到某限度时，这两条线只有一共同点而不相交，就是说两线只是相接触。

假使几何家作这样的推想，不问其有心或无心，将与上面我们已证明两线相交只得一点的道理实在相同，而他的直觉似乎也是合法的。

但这也许就是骗他的。人们可以证明有些曲线并无切线，倘若这线是规定为第二级分析的连续统。

无疑地，用像我们上面研究过的巧法子，或亦可免除矛盾；但这种矛盾既然只有在特别情形中才碰到，大家便不管它了。与其设法把直觉与分析调和起来，人们宁愿牺牲其一，而分析数学既是严密的学问，人们便归罪于直觉法了。

多维的物理连续统——在上面我曾研究过由我们感觉的直接数据或即由

费氏的实验的粗糙的结果生出来的物理连续统；我并已证明那些结果是总结在矛盾的公式中：

$$A=B,\qquad B=C,\qquad A<C。$$

现在我们看这个概念是怎样推广的，并如何能由此生出多维的连续统的概念。

设有任何两团的感觉。或者我们可加以辨别，或者我们不能辨别，有如在费氏实验中十二克的重量可别于十克的重量，但不能别于十一克的。我不必用别的东西来建设多维的连续统。

令试把各团的感觉叫做“元素”。这与数学家的点相仿佛；但这也不是完全相同的东西。我们不能说这元素是无大小的，因为我们不能把它和临近的元素区别。因此它似乎被包围在云雾里一般。拿天文学作比，我们的“元素”就如星云，而数学上的点子就如星星一般了。

这个既已说明，如果人们能由一任何元素来到任何另一元素，中间经过一连串相继续的而前后不能辨别的元素，则这些元素的系统就可形成一连续统。将这一连串比作数学家的线，正如孤立的元素比作点子一般。

在未进一步以前，先将所谓分割下一定义。设有一连续统 C，试取出其中的若干元素，而暂认为它们不属于这连续统。这些取出的元素的集合就总而名之曰分割。有时 C 借此又重分为许多不同的连续统，而所余的一团元素不再成为唯一的连续统。

于是在 C 上有 A 和 B 二元素，我们当把他们认为属于二不相同的连续统，我们其所以能看出来，因为决不能在 C 中找得一连串从 A 到 B 相继续的元素来，且每一元素与前一元素又不可辨别，除非这串连的某一元素不能与分割中诸元素之某一元素辨别出来。

因而不能被排出去。

反之，也许那成立了的分割不足以重分连续统 C。为要把物理的连续统分类，我们正得要去观察何种分割才是合乎重分之用。

如果物理的连续统 C 可用一种分割重分，分成有限数而互相可辨别的元素（故既不成为一个连续统，又不是许多的连续统），我们就说 C 是一维的连续统。

反之，如 C 只能用那本身也成为连续统的分割重分，我们就说 C 是多维的。倘只要用一维的连续统的分割就够了，我们就说 C 有二维；倘只要用二维的分割就够了，我们就说 C 有三维，余依次类推。

这样，多维的物理连续统的概念是被规定了，这全靠这件很简明的事实，即二团感觉有时是可以辨别的或有时是不能辨别的。

多维的数学连续统——至于 n 维的数学的连续统的概念，自然也可用我们在本章开始已研究过的方法推引出来。大家知道，这种连续统中的一点，可用 n 个不同的数量 v 即所谓坐标来规定。

这些量不必总是可测量的，例如在有一种几何学的分支中人们无视于这

些量的测量，而仅研究如何知道好比在曲线 ABC 上，是否 B 在 A 点与 C 点之间，而不是要知道弧长 AB 是否等于弧长 BC，或是它的二倍。这种数学名曰拓朴学。

这是一门很有体系的学说，它曾吸引许多几何学家去研究，因而发明了一系列可注意的定理。它和平常几何定理不同处，即在于它纯粹是属于定性的，且如这些图形被一位不精巧的画师将各部分比例大大地改变，甚至将直线画成多少有点弯曲的线，那些定理还是保持真实的。

这是当人们想在我们刚才所规定的连续统中引入了度量时于是这种连续统才成为空间，而几何学诞生。但这事且留在下章再研究罢。

# 第二部空间

## 第三章　非欧几里得几何学

凡一结论必先有前提，这些前提，或本身即明显的，故无须证明，或仅根据别的命题才能成立，但由于我们既不能这样追究至无穷，则凡演绎的科学，特别是几何学，必先建设在几条不可证明的公理上才行。故凡几何学的专书的公式开始就陈述这些公理。但是在这里也要有所区别的；有些公理例如“等于第三数量的两个数量必互相等”并非几何学的命题，而是分析学的命题。我认为它是先验的分析判断，我不去理会它。

然对于别的专属于几何的公理，我就要认真地研究一下了。一般专书中明白地陈述三个公理：

一、经过二点只能作一直线；

二、直线是两点间最短的距离；

三、自一点只能引一直线，和一给定的直线平行。

虽然人们常省去证明那第二公理，但可把它自其它二公理和其他更多的默认的公理中演绎而出，这且待以后再来说明。

人们久想证明那第三公理，即所谓欧几里得公设，然总是白费了心力。人们对于这种幻想所耗费的努力，真是令人不可思议的。等到十九世纪初叶，有两位大学者，差不多同时，一位是匈牙利人鲍耶，一位是俄罗斯人罗巴切夫斯基，他们用一种不可反驳的形式成立这个证明是不可能的；他们差不多替我们摆脱了那些没有公理的几何发明家；从此法国科学院每年只接到一二种新的证明论文了。

但问题还未完全结束；不久就有黎曼先生发表了著名的论文，题为“几何学之基本假设”，问题才有了大进步。

这本小册子引起许多近代的著作，稍迟我将述及，其中尤以白耳太密与赫尔莫慈的著作要提出说明。

罗巴切夫斯基几何学——倘若欧几里得公设可从别的公理导出，当我们不承认这公理，但又承认那些别的公理，则显然地人们必将得互相矛盾的后果了；所以不可能在这一些前提上，建立一种自圆其说的几何。

这正就是罗氏所做过的。他开始先假定：

人们可自一点引出许多直线和给定的一直线平行。

此外他仍旧保存其他的欧氏公理。从这些假敲他乃演绎出来一系列的定理，其中不特毫无矛盾，且他创造的几何学的严密逻辑实可与欧几里得几何媲美。

这些定理，自然是与我们所习用的大为不同，而乍看上去，还不致引起怀疑。

譬如三角形的三角之和总是小于二直角，而这和数与二直角之差别与三

角形的面积成正比例。

要想画一图形与给定的图形相似而不相等，这是不可能的。

又如分一圆周为 n 等分，自各分点引一切线，则这 n 切线将形成一多边形，只要这圆的半径不太大；如其太大，则彼此不能相交。

现在不必多举这些例子罢。罗氏诸命题与欧氏诸命题已毫无关系，但它们也同样地互相合乎逻辑联络着的。

黎曼几何学——我们试设想有一无厚薄的生物所生存的世界；又假定这些“无穷扁平”的动物都是在唯一的平面内，而不能走出来的。又假定这世界与别的世界相距很远，以免受其影响。当我们正在做这些假设时，我们不妨再假定这些动物具有理性，并且相信它们有研究几何学的能力。这样，它们对于空间一定只能看做是二维的了。

现在且假定这些理想的动物虽是无厚薄的，但是具有圆球形的样子，而不是平的，而这些球形的动物都生是在同一的球上，并不能走出的。然则它们将建立何种的几何呢？第一，它们自然还是看那空间是二维的；直线对于它们实即球面上雨点最短的距离，此即大圆周的一弧线，一句话，它们的几何将是球面几何学。

他们所谓的空间，就是这永远脱离不了的球面，在这上面表演着他们可以认识的一切现象。他们的空间将是无限界的。因它们在球面上可以一直向前走而不停止，但这空间将是有限的；在那上面虽无终端可寻，然可以打一个圈子。

那么，黎氏几何学却是推广到三维的球面几何。德国的数学大家为建立他那种几何，不单走来便抛弃了欧几里得公理，并连第一公理：从二点只能作唯一的直线也丢掉。

从球面上的二给定点，普通仅可通过一个大圆周（此即如我们方才所见的那些理想的动物所认识的直线），然而也有个例外：如此二点是在对径上的，则由此二点，可通过无穷数的大圆圈。

同样，在黎氏几何中（这至少是黎氏几何的各形式之一如是），由二点仅可通过唯一的直线，但有时亦可通过无穷数的直线。

这里黎氏几何与罗氏几何有一种相对立的地方。

例如三角形的三角的和是：

在欧氏几何中等于二直角；

在罗氏几何中小于二直角；

在黎氏几何中大于二直角。

由一给定点所可引与一给定直线相平行的直线数是：

在欧氏几何中等于一；

在黎氏几何中等于零；

在罗氏几何中等于无穷。

此外，我们要加说一句：黎氏的空间是有限的，虽然是无限界的，这两

个名词的意义与上面所说过的相同。

常曲度的面——虽然，还有一个可能的反驳。罗氏与黎氏的定理是毫不矛盾的；但无论从这两种几何的假设中所导出的后果怎样多，他们在未将所有的后果尽得以前，他们势必停止下来，不然，其数将是无穷了；难道他们再向前推演，他们就不会遇到一种矛盾而后休么？

这种困难在黎氏几何学中是没有的，只须人们以二维空间为限；事实上我们已见过那黎氏几何无异于球面几何，这几何不过是普通几何的一分支，当然毋庸讨论。

白耳太密先生同样把罗氏二维的几何归入只是普通几何中的一分支，也反对过有关它的反驳。

且看他究竟是如何做到的吧。假设在一面上有一任何图形。试想这图形是画在一种可屈折而不可伸缩的布上的，而这布便紧贴在这表面上，使得当这布移动而变形时，这图形上的各线也随着变形，但不改变长度。一般这个可屈折但不可伸缩的图形是不能换位而不致脱离这表面的；但有一些特别的面对于这种动作是可能的，此即常曲度面。

今试再将我们上面的比喻来淡，并设想那些无厚度的生物是生长在这一种的面上，于是它们就要认为能保定图形的各线长度的圆形运动是可能的事了。反之，这样的运动对于生在一个曲度可变的面上的无厚度的生物，便是无稽之谈了。

这种常曲度面可分为二种：

一种是正曲度的，可变其形而紧贴在球面上。所以这种面上的几何，变为球面几何，即黎氏几何。

另一种是负曲度的，白耳太密先生曾证明这些面的几何即罗氏几何。故黎氏与罗氏的二维几何仍属于欧氏几何。

非欧几里得几何的释义——这样一切关于二维几何的反驳都消灭了。

我们也不难把白耳太密先生的推理推广到三维几何。那对于四维几何也不退却的人，对这也自然没有困难，但这种人是很少的。所以我情愿用另法来讲吧。

设有我名之曰“基本平面”的平面，且制定一种字典，使每个名词有两行相对应的解释，好像那有两种语言的普通字典有两种同义的字一样形式。

空间……在基本平面以上的空间的部分。

平面……与基本平面相交成直角的球面。

直线……与基本平面相交成直角的圆圈。

球体……球体。

圆圈……圆圈。

角……角。

二点的距离……基本平面与经过此二点的正交圆的交点，以及此二点的非调和比率的对数。

等等……等等。

然后试将罗氏几何的定理用这字典翻译，有如用德法合璧字典翻译一篇德文一样。这样我们就得普通几何的各定理。

例如有一罗氏定理：“三角形的三角之和小于二直角”可译为：“如一曲线的三角形的三边是经延长后与基本平面相交成直角的圆弧线，则这曲三角形的三角之和必小于二直角”。这样，无论如何推引罗氏的假设的后果，人们始终不致遇到矛盾。事实上，如罗氏的二个定理是互相矛盾的，则借用我们的字典所翻出来的二译文势必亦然，但这些译文是普通几何的定理，而没有人疑惑普通几何是会有矛盾的。我们这个信仰是从何而来？并且是否合理？这个问题我可不能在这里谈，因为说起来就要拉长了。所以我上面所提出了的反驳，现在一点也没有了。

这还不算完。罗氏几何固然能具体地解释，但并非一种空洞的逻辑的练习，它还有许多的应用；我在这里既无暇谈到这些应用，也不能谈到克朗先生和我个人从它所推出的微分线性方程积分法。

况且这种解释不是唯一的，人们尽可编制许多同上面相似的字典，都只须经过简单的“翻译”，就可将罗氏几何的定理变为普通几何的定理。

内涵的公理——试问在一些几何学专书中所明白陈述出来的公理是几何学的唯一的基础吗？人们试看在依次把它们抛去之后，那些与罗氏、欧氏、黎氏理论有共同性的几个命题还是成立，人们就知其不然了。这些命题必须建设在几何家不去陈述而仅承认的前提上。设法把它们从经典的证明上清理出东，这是很有趣味的事。

弥耳以为一切定义必包含一公理，因为下定义时，人们已内涵地肯定那被规定物的存在了。这样就未免说得太远了；在数学中人们对一物下了定义后，少不了再要证明它的存在，有时其所以省去这种手续，是因一般读者都容易自去补充。我们不可忘记这“存在”一个字对于数学中的物与对于物质的物是有不同的意义的。一个数学中的物可以存在，只须它的定义的本身或与先前认可的命题都不发生矛盾。

弥氏这个观察虽不能应用在一切定义上，然对于一部分的定义是正确的。有时人们对于平面的定义是如下：

平面是一种面，在那面上诸点中的某二点联结的直线是完全在这面上的。

这定义显然内涵着一个新的公理；诚然，人们可把它改换，这也许还好些，但为此必要把公理明白地陈述才行。

别的定义也可以引起并非不重要的回思。

譬如二图形相等的问题：凡是可以把二图形叠合起来则必相等；为要将两图形叠合起来，则必先移动其一，一直到它能够接触和另一图形吻合为止；但应怎样移动它呢？假使我们发此疑问，人们一定要答道，移动时要如那不变形的固体，不可变易图形才行。因此仍显然归到原有的问题，而是转圈子

了。

其实这个定义并没有定出什么来；对于住在只有流体的世界上的生物，它是毫无意义的。假使它对于我们好像是很明白的，那是因为我们对于天然的固体的特性是习见的，而这天然的固体与那各向不变的理想固体，是没有大区别的。

虽然，这定义无论怎样不完满，总是含蓄一种公理。

一个不变形的图形运动的可能性，不是本身明显的真理，或至少它只能像欧几里得公设那样，而不是像先验分析的判断那样。

此外当研究几何学的定义和证明的时候，人们觉得势必无证明地承认不仅这种运动的可能性，并且还要承认它的几种特性。

第一这是在直线的定义中就可看出的。人们从前所给与它的定义都不大好，而那真正的定义却是暗示在用到直线的一切证明中的那一种：

“有时一不变图形的运动也许是这样的：凡属于这图上某线的各点不动，同时在此线外的各点则移动。凡这种线就命之曰‘直线’”。我们在这条陈述中已特意把那定义与其内涵的公理分开了。

有许多的证明，例如三角形之相等，由某点引一直线垂直于它直线之可能性，都假定有许多可省得陈述的命题，因为它们势必承认在空间有用某种方式移动一图形的可能。

第四种几何学——在这些内涵的公理中，有一条是很可值得注意的，因为倘若把它抛弃，人们还可构成第四种几何，与罗氏黎氏和欧氏的三种几何一样的有一致性。

为要证明人们总可由 A 点引一与直线 AB 相垂直的直线,人们设想有一绕 A 点而动且原始与直线 AB 相重合的直线 AC；于是人们将此线绕 A 点而转，一直来到 AB 的延长线上为止。

这样人们假定两个命题：第一这种旋转是可能的，其次即可转到这两线互相延长的直线上而后止。

如人们只承认第一命题，而否认第二者，人们便要得到比罗氏与黎氏几何更为奇异的一系列定理，但这也是不会互相矛盾的。

我只叙述那些定理中的一种，但我并不选择那最奇异的：一真正的直线可以自相垂直。

索弗斯·李定理——内涵地导入经典的证明中的公理的数目，是远比所需要的为多，人们曾想把它们减少到最少数。希尔伯脱先生好像曾对这问题给出确定的解答。首先人们可以先验地问这种减缩是否可能，假使那必需的公理的数目和理想的几何的数目不是无穷的。

索弗斯·李的一个定理支配着这里整个讨论。我们可这样地陈述它：

假定人们承认下列的前提：

一、空间是 n 维的；

二、不变形的图形的运动是可能的；

三、这图形在空间的位置必需 p 个条件方可确定。

于是符合这些前提的几何学为数将是有限的了。

我并可加说：如 n 是已给定，则人们可指定 p 的最高限。

所以人们如承认运动的可能性，别人们仅能发明有限数的（甚至少数）三维几何学。

黎曼几何学——但是这个结果似乎是被黎氏反驳了的，因这位学者曾建立无数不同的几何，而普通所称的黎氏几何学不过是个特例而已。

他说：一切要看人们对于一曲线的长度的定义如何。但这种长度的定义的方式是多极了，而每一个都可作为一种新几何学的起点。

这是完全对的，不过大半这些定义与那在李氏定理中认为可能的不变形的图形运动，是不符合的。所以这些黎氏几何纵然有许多好地方，但永远不过是纯粹分析的，是不能有如欧氏几何学那样可证朋的。

希尔伯脱的各种几何学——最后魏翁勒斯与希尔伯脱先生曾想出更新奇的几何，他们名曰“非阿基米得几何”。他们舍去阿基米得公理，而建筑那些新的几何，根据这公理，凡以够大的整数乘一给定长度，终必超过所先给定的任何大的长度。在一非阿氏直线上普通几何的点子都存在，但尚有无穷的点子夹在其中，这样一来，那老派几何家认为相临接的两截段之间，现在就可插进无穷数的新点子。一句话，用前章的说法，非阿氏的空间不再是二级的连续统，而是三级的连续统了。

关于公理的性质——大半数学家把罗氏几何认为不过是一种简单的逻辑的奇巧；有些人则更进一步。他们以为既然有许多种几何学，则我们的几何是的确真实的吗？无疑地，实验告诉我们三角形的三角之和等于二直角；但这因我们所运算的三角形都是太小的缘故；根据罗氏，则其相差与三角形的面积成正比例：然则当我们计算较大的三角形时，或当我们的测量更精密的时候，这种差别就可被我们感觉得了吗？由此以观，欧氏几何只是暂时的几何而已。

为讨论这个意见，我们先要问几何公理的性质为何。

这是否有如康德所谓先验综合的判断？

于是它们既然用那样大的力量来支配着我们，以致我们既不能设想相反的命题，又不能在它的上面建立理论的体系。非欧氏几何也将没有了。

为对这事信服，我们可举一真正的先验综合的判断，例如我们在第一章已知其重要作用的那一种：

如对 1 定理为真，又如人们已证定理对 n＋1 亦真，只须对 n 为真，则这定理对任何正整数都真。

其次人们试不用这种命题，而加以否认，同时为建立一种谬误的算术，有如非欧氏几何——那是人们不会达到目的的，甚至在起始时，人们还会把这些判断认为分析的了。

况且，再把我们那无厚薄的动物的幻想来谈吧；倘若那些动物，具有我

们的理性，我们决不能相信它们竟采用与其经验相反的欧几里得几何。

然则我们应该结论几何的公理就是实验的真理吗？但人们不是对那理想的直线和圆周实验的；人们只能用实在的物质实验。然则拿什么实验作为几何基础呢？这却是容易回答的。

我们在上面已经知道我们推理时总是把几何的图形认为好像是固体似的。所以几何学所借重于实验的东西，实即这些固体的性质。

光的性质和它的直线传播，也曾经是引出一些几何的命题的机会，尤其是投影几何的命题，由此以观，人们就会说：度量的几何即固体的研究，而投影几何即光的研究。

然这里却存在着一种不能克服的困难。如果几何学是一种实验的科学，则不成为一精确的科学，而它就要被不断地修改了。那还有什么可说的呢？从今天起，它就会承认错误，因为我们知道世界上没有严密不变的固体。

然则几何学的公理既非先验综合的判断，亦非经验的事实。

这原来是些公约；在一切可能的公约中，我们的选择是受了经验的事实引导；但它仍是自由的，它为免去一切的矛盾起见，才有所限制。因此尽管那些决定公设的取舍的实验定律是近似的，那些公设还是严密的真实。

换句话说，几何学的公理（我并不谈算术的）其实不过是伪装的定义。

由是人们对于这个问题当作何感想：欧氏几何是真实的么？

这个问题毫无意义。

这好比问“米达”度量衡是对的，而旧制度是错的；笛卡儿式的坐标是对的，而极坐标是错的了。这不是这种几何比那种几何真；只有比较上便利不便利而已。

而欧氏几何是并且永久是便利的几何：

一、因为它是最简明的。它这样不单是因我们精神的习惯关系，或因我们对于欧氏的空间有一种我说不出的直接的直觉；它本身确是最简明的，有如一次多项式是比二次多项式较简那样，球面三角的公式比平面三角的公式复杂，而即使一位不明白这些几何公式的意义的分析数学家看上去，也有如此的感想。

二、因为它与自然界的固体的性质颇能符合，这些固体是我们的四肢和眼睛所能接近到的，并用它们来制造测量的仪器。

## 第四章　空间与几何

我们先开始谈一个小讨论。

今如有一种生物，具有我们同样的精神与感官，但先前毫未受过教育，它们在适当选择的外界中，能接受到一些印象，使得它们建设与欧氏几何不同的几何，且能把这外界的现象都放在非欧几里得的空间或竟放在四维的空间里。

至于我们，则我们的教育都来自现实的世界，假使一旦置身在这新世界中，则我们不难把其中一切的现象都归入我们的欧几里得空间。倒过来，如果这些生物都转运到我们的世界中，则它们必把我们所有的现象归入非欧几里得的空间。

我还有什么可说的；我们稍微努力一下便也可这样做的。今如有人竭尽毕生的力去做，或许可能达到第四维的想像。

几何的空间与表象的空间——人们常常说外物的影像是局限在空间里的，甚至说唯有这条件，那些影像才能形成。人们也说，这个为我们感觉与表象准备好的框子的空间，与几何家所掌握的空间是完全相同的。

前句话对于作如是观的聪明人，一定感到很奇异。但要看看他们是否受了一些幻想的影响，而这个幻想用深刻的分析，便可消除的。

首先那真正的空间的特性是什么？我所指的是那作成几何学的对象的空间，而我名之曰“几何的空间”。下面是几个主要的特性：

一、它是连续的；

二、它是无穷的；

三、它是三维的；

四、它是均匀的，即是各点都是恒等的；

五、它是各向同性的，即是经过同一点的各线都是恒等的。

现在我们试把它和我们的感觉的与表象的框子相比，我并把它叫做表象的空间。

视觉的空间——先试考虑一种纯粹视觉的印象，而是由于在网膜底部所形成的物像而来。

略加分析，便知这个物像是连续的，但由于仅是二维的，这已经把几何的空间，和所谓粹纯视觉的空间区别出来了。

另方面这物像是放在有限界的框子里的。

最后，还有一个也是重要的区别：这个纯粹视觉的空间不是均匀的。不管在网膜上形成什么像，网膜上的各点没有同一的作用。那黄斑点决不能认为与网膜边缘的一点相同。事实上不仅是同一的对象在那斑点上产生更强烈的印象，并且在整个有限框子里，居中的点子和近边的点子是不相同的。

再深加分析，无疑地我们将知这视觉的空间的连续性和它的二维空间，也无非是一种幻觉；所以它与几何的空间相差将更远，但我们对这姑不必多说，我们在第二章中已把由这种注意所生的后果讨论得很够了。

但视觉可以让我们估计物的距离，所以又能观察第三维了。但是大家知道这种第三维的视觉，实即对光时所费力的感觉，以及双目所应作的收敛度以明视一物的感觉。

这是一些筋肉的感觉，与给我们头二维空间的概念的视觉大为不同。所以这第三维对于我们，和其他二维有不同的作用。所以所谓完全视觉的空间不是各向同性的空间。

诚然，它恰好有三维；意即在我们视觉的元素中（这至少是有助于形成大小的概念的），知其三则其余都可完全规定；若照数学的话说，这是含三独立变数的函数。

然而我们再仔细审视一下。对于第三维我们曾用二种不同的方式来发觉它；即用对光的费力和双目的收敛度。

无疑地，这两种指示总是符合的，在他们之间有常定的关系，或换数学话说，就是测量这二种筋肉感觉的变数，在我们看上去，并非各自独立的，或者，为省用那已很精致的数学概念起见，我们仍可回到第二章，而把同一的事实陈述如下：

如 A 与 B 二收敛度的感觉是不可辨别的，则同时和它相伴随的 A’和 B’二对光的感觉也将不能辨别了。

但这里可说是一种经验的事实；如作反面的假定，先验上是毫无妨碍的，又如真有这相反的假定，如这二筋肉的感觉有各不相依存的变动，那末我们将要多计及一个独立的变数，而对于“完全视觉的空间”，我们将认为四维的物理的连续统了。

我还要加说一句，这就是一种外部的经验的事实。我们尽管可以假定有一生物，具有与我们同一的精神和感官。它是生在某世界中，那里光线射到它的身上时，必经过形式复杂的折光媒质。于是供给我们视察距离的两种指示，不再联有常定的关系了。一个在这样世界中受感官教育的生物，对于完全视觉的空间必将认为四维空间了。

触觉的空间与动觉的空间——“触觉的空间”比视觉的空间更为复杂，而与几何的空间相差更远了。因此对于触觉用不着去重复那对于视觉的讨论。

然除了视觉与触觉的数据之外，还有别的感觉，它对于空间概念的萌芽同样有帮助并比较更大。这是大家都知道的，这种感觉是随着我们所有的动作而生的，这就是普通所称的筋肉感觉。

与此相对应的框子就成为所谓“动觉的空间”。每一筋肉生出一种特别的可增可减的感觉，因此我们全体筋肉的感觉所依存的变数当等于我们所有的筋肉数。因此我们有多少根筋，动觉的空间便有若干维了。

我知道人们将说，筋肉的感觉之助成空间的概念，这是因在我们对于每一运动的方向都有一种感受，而这也就是感觉中的一部分。如果这是真的，如果某筋肉的感觉要伴有这种方向的几何的感受才得发生，则几何的空间将真就是支配我们的感觉的一种形式。

但当我自己分析我的感觉时，我毫不觉得是如此的。

我所看到的，就是关于同方向运动的感觉，是用简单的观念结合方式联系在我脑中的。我们所谓“方向的感受”，即是由这种结合而来。所以这种感受决不是在唯一的感觉中可找得到的。

这种结合是很复杂的，因为随着四肢的位置，同一筋肉的收缩能对应着

多种大不同的方向的运动。

这个结合是显然已具有的了；有如其他各种的观念的结合，它是一种习惯的结果；这结果本身也是由许多的经验而来；毫无疑问地，假使我们的感官教育是在另一不同的环境中受到的，而在那里我们受着不同的印象，则必生出相反的习惯且我们的筋肉的感觉必按照其他的定律互相联系着了。

表象的空间的性质——由此可见，在视觉的、触觉的与动觉的三种形式之下的表象空间是与几何的空间大大不同的。它既非均匀的又非各向同性的；人们甚至也不能说它是三维的。

人们常说我们把外界所察辨的对象，“投影”于几何的空间；我们把它“局限”起来。

这有意义否，而有河意义？

这个意思就是说我们把外界的事物表示于几何的空间吗？

我们的表象，只是我们的感觉所仿造出来的，所以只能和它们列入同一的框子中，意即在表象的空间中。

我们之不能把外物表示于几何的空间，正如画师不能在一平面的图上画出物的长、阔、高三维来。

表象的空间只是几何的空间的影像，这个影像经了一种透视改变形状，而我们只是按照这透视学的道理才能表示物体。

所以我们并非把外物表示于几何的空间，我们只是把这物体当作在几何的空间而对它推理。

另方面，当我们说把某某物件“局限”于空间的某某点，这是什么意思？

这就是说，为达到这物，我们把要做的动作表示出来；而不说为表示这些动作，必将其本身投影于空间，以及空间的概念当因此先存在。

当我说我们把这些动作表示出来，我只说我们把和它相伴的筋肉的感觉表示出来，这些筋肉感觉是毫无几何的性质的，它们因此毫不含蓄空间概念先在的意思。

状态的变化与位置的变化——但有人将说，如几何的空间观念并不支配着我们的精神，又不是我们的任何感觉所能供给我们的，则此念又何自而生的呢？

这就是我们要研究的，而这要稍费时间才成，但我可把我所尝试的解释先扼要说来。

我们任何的感觉，孤立起来，决不能引起我们一种空间的观念，我们只是把这些感觉发生的次序的规律研究之后，才得到此念。

我们最初是知道我们的印象是会变更的；但在我们所发见的变更中，我们马上就可以有所区别。

我们有时说形成这些印象的对象，是变了状态，时而说它们是变了位置，或者它们只是移动了。

不同一对象是变态或变位，对于我们总是同样的表达出来：即印象集合

中的一种变化。

然则我们如何能够去区别它们哩？这是容易明白的。如果只是位置的变易，我们的动作可以恢复原始的印象集合，这些动作使我们再在同一的相对的地位正对着运动的物体。这样我们矫正所发生了的变化，而用相反的变化恢复原状。

譬如是有关视觉的，有一物在眼前行动，我们可“随之以目”，而利用眼球的运动可使物像永久落在网膜的同一点。

这种动作是我们良知的，因这是有意的，而且有筋肉感觉相伴的，但这不等于说我们把它表示于几何的空间。

这样，变位的特性之有别于变态，是在于它能用这方法被矫正。人们因此有时可用二种方式从印象集合 A 来到印象集合 B：一、这是无意的而不受筋肉的感觉，这是当物体移动时有的情形；二、这是有意的而有筋肉的感觉的，这是物虽不动然我们对他有相对运动时的情形。

果然如是，则由 A 集合到 B 集合的历程只是位置上的变易。

由此可知视觉与触觉，如无“筋肉的感官”的协助，决不能给我们空间的概念。

不但是这个概念不能来自唯一的感觉，而是来自“一串的感觉”，并且一个不动的物体永不能有，因为它既不能就自身的运动矫正外物变位的效果，它便绝无理由去和态的变化区别。倘若它的运动是无意的，或毫无感觉相伴，它也不能得到这种概念。

补偿的条件——有一种补偿能使两不相关的变易互相矫正，像这种的补偿怎样是可能的？

今如有一已知几何的人，他必这样推想：

如要发生补偿，当然要一方面外物的各部分，另方面我们的感官的各机构，经了这两种变易之后，仍恢复其原有相对的位置。为此，外物的各部分也必互相保存其相对的位置，并且我们的感官的各部分互相也须这样。

换句话说，在第一种的变易中，外物应如不变的固体的移动，而在矫正第一种变易的第二种变易中，我们身体的全部也须这样。

按照这种的条件，补偿就可以发生。

但我们尚不知几何学的人，因为我们对于空间的概念尚未形成，所以我们不能做那样的推理，我们不能先验地预料这种补偿是否可能的。然由经验知道有时这是做得到的，而就是根据了这件经验的事实，我们才能从位置的变化中辨别出状态的变化。

固体与几何——罗列在我们四周的万物之中，有些常常受一种移动，而这种移动同时可受我们自身的相关的动作之矫正，这就是固体。

其他形状可变的物件，除非例外，不能有这般的移动（只有位置之变易，而无形状之变易）。倘若物体移动同时变易其形状，那末我们就是用适当动作，再也不能把我们的感官的各机构移到与此物原始的相对的位置；因此我

们再也不能重新建立原始的一团印象。

这只是以后，屡经新试验之后，我们才学得把变形的物体分为若干较小的部分，那各部分都能按照固体的规则移动。这样我们把变形与其他变态有所区别；在这些变形中，每一部分只是受可以矫正的地位之变易，但全体所受的变动则较深切，再也不能用一种相关运动矫正了。

像这种的概念已是很复杂的了，而其发现在比较上已是迟了；并且如果固体的观察未曾教导我们辨别位置的变易，则这概念必不能产生。

所以自然界中若无固体，亦必无几何学了。

还有一个解释，也颇有注意的价值。设有一固体先占据位置α，其次来到位置β；在第一位置时，它使我们感受印象集合 A，而在第二位置时，印象集合 B。今设又有第二固体与第一个有不同的性质，例如有不同的颜色。我们也假定它由α到β，在α时使我们感受印象集合 A＇到β＇时感受印象集合 B＇。

一般 A＇集合与 A 集合必无相同处，B 集合与 B＇集合亦然。所以由 A 集合到 B 集合与由 A′集合到 B′集合这两种的变易，本身一般是毫不相同的。

虽然，对于这两种变易，我们都认为是移动，或更好点，我们认为同一的移动。这是怎样的一回事？

这简单地是因为它们可以被我们身体上同一相关的运动矫正。

所以这是“相关运动”才在这两现象中成立唯一的联络，否则我们永想不到把它俩接近起来。

另方面，我们的身体，利赖关节和筋肉，方可以做出无数的不同的动作；但它们都不能“矫正”外物的变动；倘若这样，那末只有我们全身，或至少我们感官的各机构加入行动时，都一致行动，意即像固体那样常保其各部的相对的位置而不变。

撮要：

一、第一我们要区别两种现象：

有些是无意的，又无筋肉之感觉伴随的，我们认为来自外物；这是外界的变易；

有些，其性质适与上相反，而来自我俩本身的动作，这是内部的变易。

二、我们注意这每一种现象的某一些变易可被它种相关的变易所矫正。

三、在外界的变易中，我们区别那些在别种的变易中有一个与此相关的变易就叫做移动；同样，在内部的变易中，我们区别那些在第一种的变易中有与此相关的变易。

由是利赖了这种互反性，我们对诸现象的一个特别种类下定义，叫作移动。就是这些现象的定律作成几何学的对象。

均匀定律——在这些定律中第一就是均匀定律。

假定因外界变易α，我们由印象集合 A 来到印象集合 B，共有被一有意的而相关的运动β矫正α，使我们仍归于集合 A。

今假定另有外界的变易α'，使我们重新由A到B。

于是经验告诉我们，这个变易α'有如α可用有意而相关的动作β'矫正，且此动作β'和矫正α的动作β对应着同一的筋肉感觉。

有了这事实，所以人们平常说空间是均匀的，且是各向同性的。

人们也可以说某动作发生之后，可再发生至二次，三次，如是类推，而不改其特性。

在第一章中我们曾研究过数学推理的性质，我们已知对同一运算重演至无穷次数的可能性之重要。

数学推理的功效全靠这种的重复性；所以这是利赖了均匀定律，它才能建立在几何的事实上。

为了完全起见，除均匀定律之外，还要加上无数相似的定律，我也不必赘述，但数学家可用一句话扼要地说许多的移动成为“一群”。

非欧几里得世界——假使几何的空间是一支配着我们每个个别考虑的表象上的框子，则人们将不能解除这框子来表示一影像，且我们丝毫不能变易我们的几何学。

但其实不然，几何学不过是这些影像前后相继续的定律的撮要。于是尽可想像一连串的表象，与我们寻常的表象处处相似，但其相继续的定律与我们已习用者不同。

于是人们可想到如有一种生物，它的教育就是在这些定律遭变的环境中受的，则它们必另有一种与我们不同的几何学了。

譬如在一大圆球中的一世界中有如下的定律：

其中的温度是不一致的；中部最高，而距心渐远则温度渐降，当我们到了围住这世界的球面上便减到绝对零度。

我再把这温度变动之定律明确一下。设有半径为R的有限界的球；r是自某点至球心的距离。则该点的绝对温度将与$R^2—r^2$成正比例。

我再假定在这世界中，所有物体皆具有同一的膨胀率，因而任何的一条尺的长度与其绝对温度成比例。

最后，我假定一物由一点移到温度不同的另一点后，它能立即与其新环境的温度相平衡。

在这些假设中，丝毫没有矛盾的或不可想像的。

于是一可动物距有限界球面愈近，则其形状也变得愈小了。

第一我们要注意，在我们习用的几何学的观点上看来，这世界固然是有界限的，但对于这上面的居民，则是无限的了。

盖当它们要走近那有限的球面时，它们渐渐地降冷，因此缩小。它们的脚步也渐渐的小，因此它们永不能达到有限的球上。

对于我们，几何学不过是研究不变形的固体运动的定律；对于这些理想生物，便是研究刚才我说过那随温度差别而变形的固体运动的定律了。

无疑地，在我们的世界中，天然的固体受了寒热之后，也发生形状或体

积的变化。但是在我们建立几何学的基础时，却把这种变化忽略去了；盖因它们既是很微小的，又是不整齐的，所以我们认为是偶然的事。

但在这假设的世界中，则大为不然，而这些变化却按照整齐的而极简单的定律。

另方面，这些居民身体上各固体部分也受同一的形状与体积的变化。

我还作一假设；我假定光线经过不同的屈折环境，且其折光率与 R2—r2 成反比例。在这情形下，容易看出光线不是直的而是圆的了。

为要把前说加以证实，我尚须说明在外物的位置的某种变易，可被这理想世界上有知觉的生物用相关运动矫正；而这是为的要恢复那有知觉生物所有的原始印象集合。

事实上，假定某物移动时，非如不变的固体的变形，而正如一固体按照上面说过的温度定律，受着不相等的膨胀而变形。为省便起见，请把这种的运动叫做非欧几里得的移动。

如一有知觉的生物在旁，则它的印象将被该物的移动所改变，但它如能有合式的动作，则这印象仍可还原的。这最后只需此物和那有知觉生物的总体（看作一体）能作这些特别移动的一种，这些特别移动即我刚才所称的非欧几里得的移动。人们如假定这有知觉生物的四肢与其世界中的其他物体按照同一的定律膨胀，则这事就是可能的了。

在我们习用的几何上，虽然这些物体移动时是变形的，且其各部分不再保持其相对的位置，但是我们将去看那有知觉生物的印象又变成一样的。

事实上，各部分的相互距离虽能变更，然起初相抵触的部分最后仍是相抵触的。所以触觉的印象并未变易。

另方面，如计及上文关于光线的折光与曲度的假设，则视觉的印象也将没有变易了。

所以这些理想的生物同我们一样，要把它们所亲身经历的现象分类，并在其中辨别出来“位置的变易”，这是可用有意的相关动作去矫正的。

它们如建设一种几何，这将与我们的不同，我们是研究不变固体的运动的；它们的几何是它们能这样辨别的位置变易，而这实即“非欧几里得的移动”，这就是非欧几里得几何。

所以和我们一样的生物，但它的教育是受在这样的世界里，则其几何学将与我们的不同了。

四维世界——人们既能表示非欧几里得世界，同样也可表示四维世界。

视觉，纵然用一只眼睛，与眼球的筋肉运动的感觉联合起来，便是使我们知道三维的空间了。

外物的影像画在我们的网膜上，它是二维空间的图画；这是透视。

但因这些物件是动的，有如我们的眼睛会动，我们对同一物体可从各种相异的观点依次看见许多的透视。

同时我们发觉由一透视率到另一透视时常有筋肉的感觉相伴。

如果自透想 A 到透视 B，与自透祝 A ' 至透视 B ' ，这两种经过都有同一筋肉的感觉相伴，我们把它俩互相比拟而认为同性质的动作。

其次再研究这些动作互相组合的定律，我们知道它们形成一群，而其结构与不变的固体的运动相同。

但我们已知这是从这群的特性我们才引出几何的空间与三维空间的概念。

这样我们明白如何三维空间的观念会从这些透视的景物产生，虽然其中每一个只有二维，这因为它们是按照某定律继续下去的。

好了，一如人们能在一平面上作三维的图形的透视，人们也可在三维（或二维）的图画上做四维的图形的透视。这对于几何学家不过是一种玩意儿而已。

人们甚至可从各种不同的观点，把同一的图形做出许多的透视。

我们很容易表示这些透视，因为它们只有三维的缘故。

试设想同一物的透视依次相继下去；而其中每一经过皆有筋肉的感觉相伴。

不必说，人们对其中两个经过，如果都是结合着同一的筋肉感觉的，则当认为同性的动作。

人们尽管可以想像这些动作是按照我们任意的定律互相组合，例如使其形成一群，而与四维不变的固体运动有同一的结构。

那里面是丝毫没有不能表示的，但这些感觉恰恰是那具有二维网膜又能在四维空间移动的一种生物所感受的。

就是在这种意义上人们才能说人们能够表示第四维。

照这样去表示我们在上章讲过的希尔伯脱的空间是不可能的，因为这个空间已不是二维的连续统了。所以它与我们寻常的空间区别太深刻了。

结论——人们可见经验在几何学的萌芽上，有不可缺少的作用；但因此就说几何学是或有一部分是实验的科学，那就错了。

即使它是实验的，但这也不过是暂时的和近似的。而这近似的程度又是何等的粗陋！

几何学只是一种固体运动的研究；但其实它是不管天然固体的，它的对象乃是一种理想的固体，绝对不变的，这不过是一种简化的，差得很远的影像。

这些理想物的概念完全是来自我们的精神作用，经验不过使我们有把它从那里提出来的机会。

几何学的对象，是在研究特别的一“群”；但这“群”的概念，在我们精神中至少已强有力地预先存在。它支配着我们不作为我们感觉的形式，而是作为我们悟会的形式。

但是，在一切可能的“群”中，应该选出那认为可说是标准的，以检验各自然现象。

经验引导我们作这个选择，但不支配着我们；它告诉我们并不是某某几何为最真实，却是使我们知道某种为最便利。

人们当注意到我能够描写我在上面理想的空幻世界，而用的是寻常几何学的语词。

其实我们即使来到那里面，我们还是不会改换这语词的。

在那里面受教育的生物，自然觉得以创造一种合乎它们的印象，而有异于我们的几何的几何较为便利。至于我们，对着同一的印象，我们一定觉得以不改变我们的习惯为最便利。

## 第五章　经验与几何

一、在前文中，我已反复证明几何学原理并不是经验的事实，且特别说明欧几里得公设决非实验可以证明的。

我所根据的理由无论如何坚实，我相信还须加以申说，因为有一种谬念根深蒂固地存在许多人的脑海中。

二、设有一物质的圆圈，试量其周围与直径，又试算此二数的比例为π否，这却是做了什么呢？人们所做的并不是关于空间特性的实验，而是有关那完成此圆的物质的特性的实验，以及那做成用以测量的米达尺（公尺）的物质特性的实验。

三、几何学与天文学——人们对于上面的问题，又曾经有另一种提法。倘若罗氏的几何是真的，则一颗很远星的视差将是有限的了；再如黎氏的几何是真的，这数就将是负的了。这些结果好像是可供实验的，而人们曾希望天文的观察可以在这三种几何中有所决择。

但在天文中所谓直线，简直就是光线的路程。所以即使万一有人发现了负数的视差，或证明一切视差都大于某定限，人们对于下述的两结论，当有所选择：我们或者舍弃欧几里得几何，或者修改光学的定律；而承认光的传达，严密讲起来不是直线。

大家对于后面这个解答必认为更有利，这是不消说的。

所以欧几里得几何对于新颖的实验是一点也不怕的。

四、人们能否主张某种现象在欧几里得的空间是可能的，而在非欧几里得的空间就不可能，于是当实验发觉这些现象时，就与非欧几里得的假设直接发生矛盾呢？我看起来，像这种问题是不能提出的。我以为提出这个问题不啻说：有无能用公尺与公分计量，而不能用尺与寸计量的长度，以致当实验发觉这些长度存在时，就和那十寸为尺的假设，将直接发生矛盾。

我们且把这个问题再仔细一看。我假定在欧几里得的空间中有一直线含有二种特性，我叫它为 A 与 B；而在非欧氏的空间中它含有 A 性，但无 B 性；最后我假定唯有直线既能在欧氏空间中又能在非欧氏空间中含有 A 性。

果然这样，那么实验就可以在欧氏的假设与罗氏的假设中有所决择了。

人们就可以见到某某可实验的而具体的物件（例如一道光线）含有特性 A，由此可以结论光是直线的，然后再看它有无特性 B。

但其实不然，因为没有一种特性能如特性 A，可以作为一种绝对的标准来认识直线，而和其他的线有所区别。

譬如有人将问：“这个特性将是如此的：直线之为物，即凡含有此线的图形移动时，势必变动此图的各点相互的距离，且使此线的各点仍旧固定？”

其实，这就是在欧几里得或非欧几里得的空间中直线所有而唯它独有的一种特性。然而人们如何用实验可以认识这种特性是属于某某具体的物呢？因此势必量其中的距禹，但又何以显得用那物质仪器量得的具体数量就可代表那抽象的距离呢？对于这个难点，人们仅仅把它打退了一步而已。

其实我刚才所说的特性，并非直线独有的，这是直线与距离二者的特性，如要将它作为绝对的标准，人们不特需要证明除了直线与距离之外，它不属于任何线，还要证明除了直线之外，它不属于任何线，又除了距离之外它不属于任何数量。但这是不确实的。

所以要想借一种具体的实验能在欧氏几何中解释一切，而不能在罗氏几何中解释一切这是不可能的，因此我结论：

任何实验与欧几里得公设永不会有所矛盾：而任何实验与罗氏公设也永不会有所矛盾。

五、但只管欧氏几何（或非欧氏几何）与实验不致直接生起冲突，这还是不够的。会不会有这情况：它之所以能与实验符合，除非他违犯充足理由律和空间相对原理才行？

请说明如下：设有一任何物质系统；一方面，我们要看那系统的各物体的“状态”（例如其温度，其电位等等），另方面，要看它们在空间的位置；而在这些可以规定这地位的数据中，我们还要区别那规定它们相对位置的相互距离，以及那些规定系统的绝对位置与其在空间的绝对方向的条件如何。

在这系统中所发生的现象的定律，与这些物体的状态及其相互的距离是有关系的；然由于空间相对性及其被动性的关系，这些定律和这系统的绝对的位置与方向是无关的。

换言之，在任何时刻，物的状态及其相互距离，仅根据这些同样物体的状态，及其初时的相互距离，而与此系统在初时绝对的位置及绝对的方向毫不相干。简而言之，我可称它为相对定律。

一直到此，我所说的有如一位欧几里得几何家说的话。然我已申明，无论何种实验，都有用欧氏的假设的解释，但同时也可有用非欧氏的假设的解释。好了，我们已做了一系列的实验，我们已把它们用欧氏的假设来解释，而我们已认识这样解释的一些实验是与“相对定律”不相矛盾的。

我们且用非欧氏的假设来解释它，这总是可能的。不过我们的不同的物体的非欧几里得距离在这新解释中与在原始的解释中的欧几里得的距离一般是不同的。

用这新方式解释的我们的实验，还可与“相对定律”符合吗？如其不然，人们没有权利说实验已证实非欧几里得几何的谬误吗？

这真是杞人忧天了。其实人们如要把这相对定律严密地应用起来，那就非应用到宇宙全体不可。盖人们如仅认定宇宙的一部分，又假使这部分的绝对位置一变，则其与宇宙间各物的距离也将变，它们对于这宇宙的局部影响因此将能有所增减，也因此能够改变其中所生现象的定律了。

然我们的系统如是宇宙全体，则实验势必不能告诉我们它在空间有什么绝对的位置与方向。无论我们的仪器何等精巧，我们所能知道的，只是宇宙的各部分的情状及其相互的距离。

由是我们的相对定律可这样说法：

在任何时我们在我们的仪器上所能测视的读数仅依存于我们在初时在这同一仪器上所能测视的读数。

但这种的说法不依存于任何实验的解释。如果某定律在欧氏的解释中为真，则在非欧氏的解释中也真了。

对于这个题目，请再让我插说一下。我上面已经说过规定一系统中各物位置的数据；我本还当说明规定它们速度的数据；于是我将要区别那借以变动各物相互距离的速度；另方面，系统的位移的和旋转的速度，此即借以变动它的绝对的方向与位置的速度。

为使人家完全满意起见，则相对定律还要这样说法才好：

在任何时刻，物的状态与其相互距离，以及在这时借以变动这些距离的速度，仅靠初时这些物体的情态与其相互距离，以及那初时借以变动这些距离的速度，但这与系统初时的绝对的位置和方向既无关系，又与初时变动这绝对的位置与方向的速度无关。

不幸这样陈述的定律不合乎实验，至少是与我们普通解释的实验不符合。

设有一人迁居在一星球上，那里的天空常是云霾满布，以至永不能看见别的星球；这人一定以为生活在孤立的空间的星球上。然这人仍可觉得球在旋转，或用量星球的扁平度的方法（这就是我们借助天文观察时通用的办法，但亦可用纯粹大地测量的方法），或用傅哥尔摆的实验。所以这星球的绝对转动便可显出了。

这里面有一件事实使哲学家触目，但物理学家则非承认不可。

人们知道牛顿从这事曾结论绝对空间的存在；我无论如何不能赞同这种见解，我将在第三部中说明何故。现在我尚无意来谈这个困难。

所以在相对定律陈述中我必当免去在那些规定物体状态的数据中混淆各种速度。

虽然，这个困难对于欧氏几何和对于罗氏几何都是一样的；所以我对它没有什么不安，而我只是顺便谈及而已。

有关紧要的就是结论：实验对于罗氏几何与欧氏几何不能有所定夺。

总之，无论如何反复申辩，对那几何的经验主义不可能发现合理的意义。

六、实验不过告知我们物与物间的关系；至于物与空间的关系，或空间各部分的相互关系，都是实验达不到，也是不能达到的事呵。

读者对此必回答道：“不错，唯一的实验是不够的，因为它只给我们一个含有许多未知数的方程式；但我如能做足够多的实验，则我将得足够多的方程式去计算一切未知数了。”

单单知道大桅杆的高度并不足以计算船长的年龄。就是把那船里各种木块统计了，人们将得许多的方程式，但还是不能知道他的年龄。所有你的测量既达到你的那些木块，只是对这些木块有所发现。同样，你的实验无论如何多，如只能达到物与物间之关系，则丝毫不能发现空间各部分的相互的关系。

七、你们又将说，如果实验达到物体，那么它至少达到物体的几何的特性？

那么先请问物体的几何的特性，究作何解？我假定这就是物体与空间的关系；所以这些特性是不可实验的，这些实验只达到物与物间的关系。这样已足见得这并不是关于实验的问题了。

然而我们先总要了解物的几何的特性的意义。当我说一物含有许多部分，我假定在这里我并不陈述一种几何的特性，而这还是对的，即使我给我所考虑的最小部分一个不合适的名辞，叫做点。

又如我说某物体的某部与另一物体的某部相接触，我所陈述的是一个关于二物间相互的关系的命题，而并不是关于物与空间的关系。

我假定读者承认我刚才所说的并非几何特性；我至少确信读者同意我说这些特性与一切度量几何的知识毫无关系。

既然如此，今设有一固体是用共同联在 O 点的八根细铁条 OA，OB，OC，OD，OE，OF，OG，OH 作成的。此外另有第二个固体，比方是一木块，上图三墨迹名曰α，β，γ。其次我假定人们发觉人们能够使αβγ可与 AGO 相接触（意即α与 A，β与 G，γ与 O 都同时接触），因为人们可依次使αβγ与 BGO，CGO，DGO，EGO，FGO 接触，其次与 AHO，BHO，CHO，DHO，EHO，FHO，又其次αγ可依次与 AB，BC，CD，DE，EF，FA 接触。

这就是人们可发觉到的事情，而事先并不必知道什么空间的度量的特性和形式。这些发觉是丝毫不达到“物体的几何特性”的。倘若这些受实验的物体是按照与罗巴切夫斯基的群（意即根据与在罗氏几何中的固体相同定律）有同一结构的群而运动，则这些发觉将为不可能的了。所以它们足以证实这些物体是按照欧氏的群运动的，或至少不是按照罗氏的群而运动的了。

这些发觉与欧氏的群相容合，这是容易见得的。

因为我们能够作这些发觉，如果物体αβγ是我们普通几何中不变形的固体，而表现直角三角形，又如 ABCDEFGH 诸点是一多面体的顶点，而这体乃我们普通几何的两个正六面棱锥体凑合而成，两者的公共底面是 ABCDEF，其

顶点一为 G，一为 H。

现在假定不是上面的发觉，而注意有如刚才可依次把αβγ联合在 AGO，BGO，CGO，DGO，EGO，FGO，AHO，BHO，CHO，DHO，EHO，FHO 诸形上，其次人们可将αβ（而不再是αγ了）依次联合在 AB，BO，CD，DE，EF，和 FA 诸形上。

这将是人们所能做的发觉，如果非欧氏几何是真的，如果αβγ与 OABCDEFGH 是不变形的固体，如果第一体是直角三角形而第二体是大小适合的两个双重的正六面棱锥体。

所以如果这些物体按照欧氏群而运动，则这些发觉将是不可能的了，但如假定物体按照罗氏群而运动，它们便可能了。所以它们足以（如果人们去做）证明这些考虑的物体不是按照欧几里得群运动的。

这样，我对于空间的形状，性质和诸物与空间的关系，不必做任何假设，又不必赋与物体以任何的几何特性，但我已做了许多的发觉，使我能够说明在一种情形中这些被实验的物体按照欧几里得群而运动，在另一种情形中它们按照罗巴切夫斯基群而运动。

但我希望人们不要说那第一种发觉成为证明空间是欧几里得的实验，而那第二种是证明空间不是欧几里得的实验。

其实人们可想像（我只说想像）有些物体之运动有使第二种发觉成为可能。其证据就是一位初来的机械匠苟能吃苦卖力，就可把它造成。但你不要就此结论空间是非欧几里得的呵。

并且就是当那机械匠造成那些我方才说过的奇怪物体时，那些寻常的固体仍能存立，所以必须结论空间同时是欧几里得的与非欧几里得的了。

例如殷有一半径 R 极大的圆球，其温度按照我讨论非欧几里得世界时的定律，由球心渐渐降低到球面上。

我们可能有一种膨胀性可忽去的物体，而可认为寻常不变形的固体；另方面，有一种膨胀率极大的物体，而可认为非欧几里得的固体。我们可有两个双重的棱锥体 OABCDEFGH 与 O′A′B′C′D′E′F′G′H′又有两三角形αβγ与α′β′γ′。第一双重棱锥体将是直的，而第二棱锥体是曲线的；三角形αβγ将是用一种不可膨胀的物质制成，而α′β′γ′是用一种极易膨胀的物质制成。

用三角形αβγ与双重棱锥体 OAH 就可得第一种发觉，用三角形α′β′γ′与双重棱锥体 O′A′H′就可得第二种发觉。于是经验似乎起先证明欧几里得几何是真实的，然后证明这是谬误的了。

所以经验只达到物体，并不达到空间。

补充语

八、为完全起见，我还当说到一个很微妙的问题，但是因为太长的缘故，只能把我在形而上学与道德杂志及在一元杂志中的著作概括于下。现在要问，我们所谓的三维空间究作何解？

我们已知道被我们筋肉的感觉所发觉的“内部变动”之重要。它们可以用为表征我们身体上各种的姿态。我们试任意认定姿态 A 为起点。当我们由姿态 A 到姿态 B 时，我们受到一些筋肉的感觉 S，而这些感觉 S 即确定 B。但我们总是要注意有时 S 与 S′的两种感觉可以确定同一姿态 B(因为起初姿态 A 与最后姿态 B 既相同，其中经过的姿态和相对应的感觉可以不同的）。所以究竟用何法我们认明 S 与 S′有相等的价值呢？这是因为它们可用以补偿同一的外界的变易，或一般地，在补偿外界的变易之时，二感觉之一可以其他代替。

在这些感觉中，我们已区别那些独自能补偿外界的变化，而名之曰“移动”。对于两个太近的移动，我们既不能有所辨别，故这些移动的集合含有物理连续统的特性；经验告诉我们说，这就是六维的物理连续统的特性；然空间自己到底有多少维，我们却还不知。我们当去解决另一问题。

何为空间之一点？这是大家都自信知道的，其实这是幻想。我们所见的，当我们设法去表示空间的一点，这就是白纸上的黑点，黑板上的白点，这总是一件东西。所以这个问题要如下文去理解才行：

当我说 B 物现占的位置与刚才 A 物所占的为同一点，这是何意？或用何种标准，我可有此种认识？

我要说，虽然我未移动（这是我由筋肉感觉知道的），我的第一指方才触了 A 点，现在触着 B 点。我可用别的标准来说；譬如换一个指去指点，又或用眼光去察视。然第一标准已足够了；我知道如第一标准回答对的，则其余的亦必有同一的回答。这是由经验我才能知道的，但这是我不能先验的知道的。这也是为了这个缘故，我才说触觉不能远隔，这又是另一种方法说明同一的经验事实。反之，如我说眼光可远离于物，这就是说眼光所供给的标准可回答对的，而别的标准则回答不对。

其实，一物虽远离了，然其影像仍可留在网膜的同一点。视觉回答对的物仍停留在同一点，而触觉回答不对，因为我刚才接触那物之手指，现在已碰不到它了。如果经验告诉我们说一指拇回答对的，同时另一指拇回答不对的，我们仍是可以说触觉作用可以远隔。

总而言之，对于我的身上每一姿态，我的第一手指确定一点，而唯它能确定空间之一点。

由此每一姿态即有一点相对应，但往往同一点可有许多不同的姿态相对应（就是在这种情形中我们才说我们的手指未动，所动者是其余的体部）。所以在这些姿态的变易中我们区别那手指未移动的一种变易。我们怎会来到这步？此因我们常常注意到在这些变易中那与于指接触的物体并未脱离这个接触。

所以我们可以把所有的姿态列入同一类，这些姿态可由我们前面所区别的变易中之一彼此互相引出。对同类的各种姿态，与空间的同一点相对应。所以每一类有一点相对应，而每一点有一类相对应。但人们可以说，经验所

达到的并非点子，而是这一类的变易，或更好些，是相应的筋肉的感觉之类。

于是当我们说空间是三维的，即是简单地说：这些类的集合对我们有加三维物理的连续统的特性。

人们又可想这是实验告诉我们说空间有几维的。但实际上，此地也是实验不达到空间，而达到我们的身体及其与邻近物之关系。并且这些实验是很粗陋的。

在我们头脑中，早就存有一些群的潜伏观念，其理论已经黎氏研究过了。我们到底拣那一群作标准，以比较那些自然界的现象？这一群选了之后，我们还要拣那一小群，以表征空间之一点？经验用指示我们那一种选择最合我们的身体特性的方法指导我们。然而它的功用仅限于此。

祖传的经验

有人常说如个人的经验未能创造几何，祖传的经验则为不然。但这是怎讲呢？其意是否我们不能由经验而证明欧几里得的公设但我们的祖宗竟能做过？这丝毫不是的。人们的意思，即用自然选择法，我们的精神能适合外界的情形，它采用了最有利于人种的几何；换句话说，那是便利的几何。这一点是与我们的结论完全相符合的，几何学不是真实的，但是有益的。

## 第三部力

### 第六章　经典力学

英国人将力当作实验科学教授，在大陆的国家，人们就把它认为一种演绎的和先验的科学来叙述。不必说，这是英国人有道理；不过在其他歧途中，人们怎会忍耐这样久？何以大陆的学者虽想脱离他们前辈的习惯，但总是不能完全逃出这个难关呢？

另方面，如果力学原理的来源不过是实验，这是否只是暂时的和近似的呢？将来新的实验不能使我们一旦修正这些原理，或竟抛弃它们么？

这些是自然会提出的疑问，而其解决之困难主因是在一般力学专书不能分明何为实验，又何为数学的推理，何为公约，又何为假设。

这还不算数：

一、绝对的空间是没有的，我们所理解的不过是相对的运动而已；但是人们陈述力学的事实时，总当空间是绝对的，而把它们归入其中。

二、绝对的时间是没有的；所谓两个历时相等，只是一种本身毫无意义的断语，而要获得一种意义也必须用公约。

三、不但我们没有两个相等的时间的直觉，并且我们对于两地所发生的两件事情同时并现的直觉也是没有；这事我在时间之测量[①]一文中已详论过了。

四、最后，我们的欧几里得几何亦不过是一种公约的言语；我们可以把力学的事实归入非欧几里得的空间，这虽然是个比较不便利的标志，但和我们平常的空间是同样地合法；陈述将比较繁得多；但它还是可能的。

这样绝对的空间，绝对的时间，甚至几何学，并非支配着力学的条件；这些东西之不先力学而存在正如法文不比那些用法文表现的真理逻辑地先存在。

人们可把力学的基本定律用一种与这些公约毫不相千的言语说明；而人们将必更为明白这些定律的本身是什么；这就是安得那得先生在他的“物理的力学”中所做过的至少是部分的尝试。

这些定律的陈述自然将比较繁得多，因为正是为要缩短而简化这种陈述，才想出来这些公约。

至于我呢，除了关于绝对的室间外，我把这些困难姑且放下；这决不是忽视它们；因为我们在前两部中，已经充分讨论过了。

所以我暂且承认那绝对的时间和欧氏几何学。

惯性的原理——凡物不受外力只能作直线的匀速运动。

---

[①] 玄学与道德杂志，第 6 卷，1 至 13 页（1898 年 1 月）；参考利学之价值，第二章。

这是否先验地支配着精神的真理？果真如是，为何希腊学者竟没有知道？他们又怎能相信那发生运动的原因一停，则那运动也就停止呢？又怎知凡物如不受外界阻力则常绕圆旋转，即所谓运动中之最高贵者？

人们如说物的速度是不可变的，假使它无变易的理由，则人们不是也可坚持说如物不受外界改变它的原因，别此物的位置不变，或其轨道的曲度不变？

所以惯性原理既非先验的真理，是不是经验的事实呢？但人们曾否实验过毫不受外力的物体，如曾做过，则人们又何从知道这些物曾否已受了外力呢？人们常用下面的例：一弹子滚于一张大理石的平面上好久不停止；但我们何以说它是毫不受外力呢？是否因为它远离了他物，所以说它是毫不受外力么？命若任意把它投向空中，它离地也不远；大家知道在这种情形之下它将受地心吸力的影响。

一般力学教授常是很快地讲过这例；但他们加说惯性原理被其后果间接核验。他们没有好好地解释，其实他们想说人们可以核验一更普通的原理的各种后果，而惯性原理不过其中之一特例而已。

对于这条更普通的原理，我想这样陈述：

某物之加速度仅依存于此物之位置及其邻近物之位置与速度。

照数学家的说法，就是宇宙间一切物质分子运动都依存于二阶微分方程式。

为说明这实在是惯性原理之自然的推广，我还要求读者允许作一种虚构。我上面已说过，惯性原理并不是先验地支配我们的；别的定律，和它一样，也能与充足理由律相容。如有一不受外力之物，与其假定它的速度不变，人们可以假定这是它的位置或其加速度不当变易的。

好了，我们此刻暂把这两个假想的定律之一认为自然定律，而用以代替惯性定律。然则什么将是它的自然推广？稍一思索便可知道。

在第一情形中，人们当假定物之速度仅依存于其位置与邻近物体之位置；在第二情形中，假定物体加速度之变易，权依存于物之位置，邻近之物体，它们的速度及其加速度。

换数学的术语说：就是运动的微分方程式在第一情形中是第一阶的，在第二情形中是第三阶的。

现在把我们的虚构修改一下。我假定有一与我们太阳系相似的世界，不过因一种奇怪的意外，其中众星的轨道没有离心率和倾角。我又假定星群的物质太小，以致它们相互干扰的影响极弱。那么在这种星球上的天文家必结论说，一星球的轨道必是圆形，并与某平面相平行；某星球在某时间的位置已足规定它的速度与整个轨道了。他们所采用的惯性定律必是我刚方说过的第一假设定律。

今试想这个系统有一天忽被来自远方星座的一大质量的物体极速地穿过。于是所有轨道必大为扰乱。我们的天文家还不致十分惊讶；他们必猜想

这颗新星乃是唯一的祸首。但他们还会说，当这大星远离之后，秩序自然又可恢复；毫无疑问，星球与日球的距离虽不能变成像灾变以前的原状，但一待捣乱的星去了之后，则各轨道又将变为圆形。

这一直要等那捣乱的东西远离之后，而那些轨道不恢复圆形，却变成椭圆的，只是到了这时候，这些天文家才发觉他们的错误，并有重新改造他们的力学之必要。

我已把这些假设着重地说了一番；因为好像要人们好好地弄懂何为广义的惯往定律，只有把它与一个相反的假设相对立才行。

现在却好了，这个广义的惯性定律已由实验核验否，并能否这样？当牛顿著原理论一书时，他以为这是已成立的真理，并且已由实验核验了。他的这种见解不特是惑于拟人体论的偶像——我们以后再说罢——并且受伽利略工作的影响。他还受了凯普勒定律的本身影响；盖根据这种定律，凡一星球之轨道可由其初时之位置与速度完全确定，而这正是我们广义的惯性原理所要求的。

如要这种原理只是貌似的真实，如果怕将来这个原理被与我刚才和它相对立的原理相似的原理所代替，那么除非我们被某种奇怪的偶然所遗误；有如我在上面所说的虚构中，曾使我们理想的天文家走入迷途的那偶然一样。

这样的假设是太不合理了，不值得在这里停留。谁也不信会有这种偶然的事；在观察误差的范国内，那两离心率恰恰都是零的概率并不较小于在误差范国内一个恰恰是〇·一，一个是〇·二的概率，这是无疑的。一件简单的事情之概率不必小于一件复杂的事情之概率；然假使前者发生了，我们不能相信自然界有心骗我们。这种的误会的假设既然撇开了，我们就可以认为在天文学一方面，我们的定律确已被核验了。

然天文学不是物理学全体。

人们岂不想到一旦有些新的实验来，会使定律在物理学中某部分不通行吗？凡一实验的定律都待修改的；人们总当希望某定律将来可代以更精确的定律。

然而竟无人真正疑心我们所说的定律永不会被抛弃或遭改正。何故？这正是因为人们永不能把它作一决定性的实验。

如要这个考验是完全的，第一要宇宙万物经了某定时间仍旧归还原地，而恢复原始的速度。在那时候，人们就可见得它们是否仍依循前次的轨路了。

但这种考验是不可能的，人们最多只能做到一部分，而且无论怎样做得好，总有些物体是不能还原的；所以各种对于定律的抵触，由此都可解释了。

这还不算数；在天文学中我们看见我们所研究运动的星球，且我们承认它们不受其他不可见的物体之影响。在这种情形之下，我们的定律，要么可以核验要么就不可核验。

但在物理学中则不然，若说一切物理的现象都是由于运动，那就是其中我们看不见的分子运动。故如我们所见的某物之加速度，除与其他可见物的

位置与速度和先前已知其存在而不可见的分子的位置与速度有关，此外还与他物有关，则我们何尝不可假定这他物即其他分子的位置或速度，而这些分子是我们以前还未发觉它存在的。于是那条定律仍可保存。

且让我用数学的术语把上面的意思换一个形式来说明。我假定我们观察 n 分子，且其 3n 坐标可以满足 3n 四阶微分方程式（而非如惯性原理所要求为二倍的）。我们知道如加入 3n 个辅助变数则 3n 四阶方程式可化为 6n 二陪方程式。由是如假定这 3n 辅助变数用以表示 n 个不可见分子的坐标，则结果又符合惯性定律了。

总之，这个定律既在一些特别情形中可以用实验核验，即不怕可推广到最普通的情形中，因为我们知道在这些普遍的情形中，实验既不能把它肯定也不能反驳。

加速度定律——物体的加速度等于它的质量除所加力之商数。

这个定律可用实验核验吗？为此必将这定义中的三量：加速度、力和质量加以测定。

我承认人们可以测定加速度，因为我暂把关于测量时间的困难按下不提。但力与质量当如何测量呢？我们简直不知道这是什么？

何谓质量？牛顿说这是体积乘密度——汤姆生和代脱都认为这不如说密度乃体积除质量之商。何为力？拉格朗日说这是产生物之运动或引其再生运动之原因——纪哥夫则说这是质量乘加速度之积。然则何以不说质量即加速度除力之商？

这些真是解决不了的困难。

当人们说力乃运动之起因，这不啻谈形而上学，而人们如把这种定义认为满足，它一定毫无效果。要想一定义有点功用，它必能指示我们如何测量力；仅此已足，我们毫不希望它告诉我们力的本质是什么？更不必问它是运动之因或果。

所以第一要规定二力的相等性。如何二力才相等？人们将说，凡相等的二力施于同一的质量上可发生同一的加速度，又或二者直接相反的时候，它们成平衡。这种定义不过骗骗眼目而已。我们决不能把加于一物的力调到另一物上，有如把火车头调换在别的一辆车子上似的。所以不可能知道施于某物之力如果施在另一物时，其加速度将如何。我们又不可能知道如果曾经是直接相反的二力在不直接相反时，它们将如何。

当人们用动力计测量力之大小或用一重量使它平衡时，这可说就是要把上述定义具体化。为简化起见，设有自下向上二直向力 F 与 F′并分别地加在 C 与 C′两物体上；我又把一个重物 P 先挂在 C 物上，后挂在 C′物上；如在这两例中都得平衡，则我结论 F 与 F′的力相等，因为它们都是等于 P 物之重量。

但我能否保证，当我将 P 物由物体 C 移到物体 C′时重量未变？这可大不然，我确信这是相反的；我知道重量之强弱，随地而易，譬如在两极的当

比在赤道的为强。无疑的，这种差别是很微的，而在实用中我是不算它的，但一条很完美的定义却要有一种数理的精密性才行；这种精密是不存在的。我所说的有关重量的话，自可应用到动力计上发条的力，因为温度以及许多的情况均能使其变动。

这还不算数：人们不能说 P 物的重量是施于 C 物上而直接与 F 力平衡。所施于 C 物者，乃 P 物加于 C 物之作用 A；P 物一方则受有自己之重量，一方则受有 C 物加于 P 物之反作用 R。结果 F 力等 A 力，因此力使其平衡之故；A 力等于 R 力，这是根据作用与反作用相等之原理；最后，R 力等于重量 R，因此方使其平衡之故。这是从这三个等式，我们方才结论 F 等于 P 的重量。

所以在两力相等之定义中，我们势必引用作用等于反作用之原理；因此这个原理再不可认为实验定律，而当认为一种定义。

所以我们具有两个法则以认识两力之相等；互相平衡之两力相等；作用与反作用之相等。然我们上面已见过这两种法则是不够的；我们势必采用第三法则，且承认某种力，例如物之重量，其方向与量均为常数。但是我已说过，这第三规则乃是实验的定律，它只是近似地真实；这是不好的定义。

所以我们被引到纪哥夫的定义；力等于加速度乘质量之积这条“牛顿定律”也不能看作实验的定律，它不过是一定义而已。但这定义还是不够的，因为我们不知道质量是什么。自然我们可借它来计算在不同的时候加于同一物体的两力的比率；至于加在两不同物的两力的比率，则它丝毫不能告诉我们什么了。

为要补充这个定义，我们又须引用牛顿第三定律（作用与反作用之相等），这还是不当认为实验的定律，而当认为一种定义。今有互相抵触之二物 A 与 B；A 之加速度乘其质量等于 B 施于 A 之作用；同样，B 之加速度乘其质量等于 A 施于 B 之反作用。若照定义，作用既等于反作用，则 A 与 B 的质量之比率当等于二者加速度之反比。两质量之比率就是这样定明；而要实验去核验这个比率是常数。

如果除了 A、B 两物之外，并无世界上它种物力参加，则此定义甚善。其实不然，A 之加速度不但由于 B，且由于许多别的 C、D 等物。所以如要应用先前法则，必须将 A 之加速度分解成若干分量，而在这些分量中认明那一分量是由于 B 的作用的。

如果我们承认 C 施于 A 之力，是简单地加在 B 施于 A 之力上，虽有 C 之参加，仍不变 B 施于 A 之力，或虽有 B 之参加，不改 C 施于 A 之力；结果如果我们承认两物相吸引，其吸引力之方向是在速接两物之直线上，且此力只依赖两物之距离如何；一句话，如果我们承认向心力之假设，则这种的分解还是可能之事。

人们知道，如要定天空中星球之质量，人们所用的原理大为不同。万有引力律说，两体之吸引力与其质量成比例；今如 r 为它们的距离，m 与 m′是它俩的质量，K 代表常数，则此吸引力为：

$$\frac{Kmm'}{r^2}$$

但这里人们所测量的并作为力与加速度之比的质量，而是有吸力的质量；并非物之惯性，而是它吸引之能力。

这是一个间接的方法，理论上不一定是需要的。也许吸引力与距离平方成反比例，而不与质量的乘积成比例，即它等于：

$$\frac{f}{r^2}$$

而非：

$$f=kmm'$$

倘若是这样的，人们用天体的相对运动之观察，仍然可以测定这些物体的质量。

然我们有无承认向心力假设之权？这个假设是否严密地准确？它的确永不会与实验相矛盾吗？谁敢断定呢？且如我们应舍弃这个假设，则此惨谈营造而成的大厦将即倾复了。

我们再无权可说 A 之加速度之分量是由于 B 力的作用。我们毫无方法把它和由于 C 的力或其他物之力的加速度分别。那测定质量之法则，现在却不能应用了。

然则作用与反作用相等原理中尚有何物存在？今如舍去向心力的假设，则那原理必当如是陈述：凡一脱离任何外力的系统中的物体所受一切力之几何总和为零。换言之，此系统之重心运动将为直线的而匀速的。

这样才似乎是对质量下定义之一法；重心之位置自然是依存于质量的价值；故必安排这些价值，使这重心做直线而匀速的运动；如牛顿第三定律是真的，则那总是可能之事，而这可能性一般唯有一种方式。

然世界上没有脱离一切外力之系统，宇宙间各部分多少总受其他一切部分之力。故重心运动之定律，唯应用于宇宙全体才算严密的真实。

但是如要从中知道各质量之值，必先观察宇宙重心之运动。这个后果之荒谬是很明显的。我们仅知相对的运动，宇宙重心之运动是我们永世不能发觉的呵。

所以我们一无所有了，而我们的力量是白费了；不得已我们自认不中用，只好退让到下面的定义：质量是一种系数，便于演算而已。

我们如把不同的价值分配到各质量，我们使可重新建立力学。这个新的力学即不会与实验矛盾，又不会与动力学的普遍原理（惯性原理，力对质量和加速度成比例，作用与反作用之相等，重心的直线而匀速的运动，面积原理）相矛盾。

不过这些新力学的方程式，将比较的不简单。我们听好：比较不简单的是第一部分的数项，也就是实验已告知我们的数项；人们或者可把质量稍微改变，而不致使全部的方程式的简单性有所增减。

赫慈尝间力学的原理是否严密真实的。他说：“照许多物理家的见解，

最遥远的实验可使那不可动摇的力学原理有所改变，这真是不可思议的；然而由实验中得来的东西，总是可由实验矫正的。”

照我们刚才所说的，这未免有点杞人忧天了。动力学的原理，我们起初看上去，貌似是实验的真理；但我们已经不得已把它们当作定义了。这是照定义力才得等于质量与加速度之乘积；这就是一种以后永不受任何实验攻击的原理。这也是接定义作用才等于反作用。

但是人们要说哪，这些不可核验的原理是丝毫没有意义的，实验不能反驳它们，但它们不能告诉我们以有用的东西；那么研究动力学有何好处呢？

这样太快的判罪未免太不公正了。在自然界中没有一种系统是完全孤立的，完全脱离外界一切影响的，但是有一种系统大约是孤立的。

人们如观察这样的系统，人们不但可以研究其中各部分间的相对运动，且可研究它的重心对于宇宙间其他部分的相对运动。人们就可发觉这个重心运动大约是直线而匀速的，正与牛顿第三定律相合。

这里是一个实验上的真理，但决不会被实验推翻的；其实一个比较更准确的实验会告诉我们什么？它会告诉我们说定律不过大约是真的；但这是我们早已知道的了。

现在人们可以了解实验何以可做力学原理之基础，然而永不会和它发生矛盾。

拟人力学——人们要说哪，纪哥夫只是随同一般数学家而倾向于唯名主义，他虽是能干的物理学家也免不了这一点。他想有一种力之定义，因此他就采取了首先遇到的命题；但是一个力之定义，我们却不需要：力之观念是原始的、不可分析的、不可下定义的概念；我们都知道它是什么，我们对它有一种直接的直觉。这种直觉来自费力的概念，而这是我们自幼就已熟悉的了。

但是，首先即使这直接的直觉可以使我们知道那力的本身的真正性质，但它还不足以建立力学；况且它也是完全无益的。紧要的，不是要知道力之为何物，是要知道怎样测量力。

凡是不能教我们去测量它的，对于机械技工也是无用的，这正如研究热学的物理学家对于净或热的生观概念是一样的无用。这种主观的概念不能用数目表出，所以是无用的；假如一位大学者的皮胃是绝对不良的热导体，因而对于冷热是麻木不仁的，但他也能与别人一样视察温度计，而这样对他已足够建设整个热学的理论了。

但这种费力的直接的概念不能用以测力 ;例如平常人举起 50 公斤的重量时显然要比提惯包裹的人吃力。

还有一层：这种费力之概念不能使我们领会力之真正性质；最后它不过留了些筋肉的感觉，而人们决不会相信太阳吸引地球时，它受有筋肉的感觉。

一切人们在那里所能探寻的，只是一种符号，比那几何家所用的矢还要不正确和不便利，然都是离开实际太远咧。

这种拟人主义在力学萌芽时代曾起了很大的作用；有时它也许会供给一种符号，为少数学者所满意；然而它是一点也不能建立什么含有真正的科学特性或哲学特性的东西的。

“线之学派”——安屈得先生在他著的“物理的力学教程”中曾把拟人力学返老还童。他用他所奇怪地称为线之学派以对抗连纪哥夫也在内的力学家一派。

这派想“把一切都归结于一些质量可忽去的物质系统中来考虑，而这些系统是被认为在紧张情形之下，且能把极大的力量传达于远处的物体，这种系统的理想的型式就是线”。

一条传达任河力的线，受了这种力量，立郎轻微地伸长；由线之方向我们可以看出力之方向，这力的数量则由线之伸长而度量。

于是人们可以想像下面的一个实验了。有一物 A 系于一线；在另一端我们加上任何一种力，我们变动这力一直到使此线伸长为 a 为止，同时我们登记 A 之加速度；拿去 A，换以 B 放在同一线上，再重新加力，或其他一种力，我们又使它变动一直到使此线伸长为 a 为止；同时登记 B 之加速度。人们用 A 与 B 重复试验，但须使线伸长为 β。这四个观察所得的加速度当成为比例。于是上面所说明的加速定律就有实验上的核验了。

或者人们还可使一物受同样的而紧张的许多线的同时作用，再由实验去寻找这些线的方向使这物平衡。这样人们就可由实验证明力之组合法则了。

不过到底我们所做的是甚么？我们由线受力后之变形而定明此力，这还算合理；其后我们承认如有一物系于一线，则此线所传给它的力量等于物体施于此线的作用；结果我们还是用了作用与反作用相等的原理，但并不把此原理认为实验的真理，而是认为就是力之定义本身。

这个定义和纪哥夫所定的同样是公约性的，但它比较很不普遍。

所有的力不显得都被线传达（并且如要作此比较，则这些力须是被许多同样的线传达才行）。假使人们承认有一条不可见的线把地球系在太阳上，则至少人们应同意是无法可以测量这线之伸长的。

由是以观，我们的定义，十有九是不对的；人们决不能给它任何意义，所以还是要回到纪哥夫的定义才行。

那未何必费了这个周折呢？你们承认了力之某种定义，而它在某种情形之下才有意义。在这情形中你们用实验核验它引出加速定律。根据这实验，然后你们再将加速定律作为在任何情形下的力之定义。

今如将加速定律认为在一切情形中之定义，又把这些所说的实验认为并非此定律之核验而是反作用原理之核验，或做为弹性物体之变形只靠加于此物之力的证明，这样不是比较更简单些吗？

至于你们的定义能被接受之条件永不会完全满足的，一条线永不会没有质量的，此线除受系结物的反作用之外不受其他力，这些都没有算在内。

安屈得先生的观念颇饶兴趣；它虽对于我们逻辑上的要求不能与以满

意，然能使我们对于力学基本概念的发生史更加了解。它们所引起我们的迴思能使我们看明人类的思想如何从朴素的拟人主义进到现代科学之概念。

我们在起点看到一种很奇特的，实即很粗陋的实验；到终点时，则看到一种很精确的、很普通的定律，而我们把这确实性认为绝对。这种确实性，可说原是我们认那种定律为一种公约我们才自由地给与它的。

然则加速定律与力之组合法则，都不过是任意的公约了吗？这是公约，不绪；任意的，就不是了；人们如能细看那些引导科学创造家采用公约之实验，则这些实验无论如何不完美，已足证明这些公约之合理而非任意的了。因此最好人们常常注意到这些公约的实验的根源上去。

## 第七章　相对运动与绝对运动

相对运动原理——人们曾经想把加速定律速储到一个更普遍的原理上去。任何系统的运动当遵守同样的定律，不问人们把它纳于固定的坐标轴或纳于作直线而匀速运动的坐标轴。这就是相对运动原理，它根据两种理由支配着我们：第一，有最浅近的试验证实它，其次相反的假敲是会被人们理智所唾弃的。

那么我们承认了它罢，并设有一力加在一物体上；又设有一位观察者，其均匀速度正等于物体的初速度，则此物对于观察者的相对运动必与它从静止出发的绝对运动相同。人们由此结论物体的加速度不应依赖它的绝对速度，人们甚至还想从此引出一个加速度定律的证朋。

这个证明已隐约地散见在大学理科入学考试课程之中了，显然这个尝试是白费辛苦的。阻挡着我们不能证明加速度定律的障碍，实因我们未曾获得力之定义；这个阻碍仍旧存在，因为我们所提的原理未能供给我们所缺乏的定义。

但相对运动原理仍然是有趣味，而对它本身是值得研究的。我们首先设法把它精密地陈述罢。

在上文我们说过一孤立的系统中各物之加速度只依其相对速度及其相对位置，而不依其绝对的速度与位置，只要作为相对运动所根据的活动坐标轴的运动是直线而匀速的运动。又如人们愿意这样说，它们的加速度仅依其速度之差数及坐标之差数，而非这些速度与坐标的绝对值。

倘若这个原理适合相对的加速度，好点说，适合加速度的差数，那末把他和反作用原理组合起来，人们便可引证它对于能对的加速度还是真实的。

所以剩下来我们要看的，就是如何证明加速度之差数仅依速度的及坐标的差数，或用数学的话说，就是这些坐标的相差数可以满足二阶微分方程式。

这个证明可否由实验中演释出来，或由先验的思想推出来？

读者试回想我们在上文所说过的，便可自做解答了。

这样陈述的相对运动原理与上面我所说的广义的惯性原理实相仿佛；但

也不尽然，因为一是坐标，一是它们的相差数。所以这个新的原理所告诉我们的东西多于旧的，但其中讨论和结论都是一样的；可不必赘述了。

牛顿的论据——此地我们遇见一个很重要的甚至值得争辩的问题。我已说过相对运动原理对于我们不但是实验的结果，并且先验地任何相反的假设都会遭人们理智所唾弃的。

然则何以只是运动坐标轴作直线而匀速运动时，那个原理才是真实的呢？如这运动是会变的，或至少变成匀速的旋转运动，则这个原理对于我们似乎仍当有同样的支配力。但是在这两种情形中这个原理是不真实的。

对于轴的直线而非匀速的运动的情形我且不多说；仔细一看，一切谬论都可打消了。今如我站在车辆中，而车碰到障碍物骤然停止的时候，虽然毫无一力直接加在我身上，我也一定要倒在相反的方向。这没有什么神秘，因我虽没有受到外力，但那辆车则已受到外力的冲动了。两个物体之一的运动受了外因的改变，两物的相对运动会立郎改变，这并不是什么荒谬的事。

我现在要仔细讨论属于作匀速旋转运动的坐标轴的物体之相对运动。今如天空不断地密布云霾，加我们又无法观察那些星球，但我们仍可结论地球在旋转；其法在测视地球之扁平率，或用弗哥耳的摆动实验。

不过在这情形中，说地球是旋转的，可有意义吗？如无绝对的空间存在，那么人们可否不绕着什么东西而旋转，而另方面我们怎能承认牛顿的结论而相信空间是绝对的？

但是我们仅知这些可能的解答都使我们讨厌还是不够的；我们还要一个个地解析我们唾弃它的理由，使我们深知缘因而作我们的选择。所以望读者恕我下文冗长的讨论罢。

试仍回到我们刚才的幻想：层层的云霾密布在天上以致人们不能窥见星球，且亦不知其存在；那末这些人怎能知道地球是旋转的呢？他们一定比我们的祖先更要坚持说地球是固定的和不能摇动的；他们还要等更多年代才得有哥白尼产生，虽然这位哥白尼终久必到的；然则他怎样来到呢？

这世界上的力学家不会走来便碰着什么绝对的矛盾。在相对运动的理论中，人们除了实在的力之外，还想出两种假想的力，是即所谓普通离心力与组合离心力。所以我们理想的学者可以把这两力看作实在的来解释一切，而他们在那里不会看到与广义惯性原理有何矛盾，因为这些力中一种有如真正的吸引力，依存于系统各部分的相对位置，一种有如真正的摩擦力，依存于它们的相对速度。

但是不久又有许多的困难会唤起他们的注意；他们如能实现一个孤立的系统，则其重心运动将没有一条大约是直线的轨道了。为说明这个事实，他们可以利用离心力，而把它认为实在的，且无疑的，他们认为这是由于物体之相互作用。不过他们将不能看到在距离极大的时候，即当孤立性愈近实现的时候，这些力会消减；相反地，离心力随距离之增长而增到无穷大。

这个困难对于他们似乎够大的了，但他们所受的阻碍并不长久；他们会

很快地就想出一个有如我们以太的很微妙的媒质，而一切物体都浸润其中，且受其排斥作用。

然这还不算数。空间是对称的，但运动定律并不表现对称，它们对于左右是应该有所区别的。例如人们会看到台风总是向一个方向旋转，然而天空中的星石，因为对称的缘故，无区别地往左转或往右转。如果我们的学者能竭力造成他们的一个完全对称的宇宙，这个对称性是不能持久的，虽然表面上没有理由可以使这个对称性向某一方面挠乱而非向另一方面。

无疑地他们是会从这里解脱的，他们会发明出来一些不比多列麦的玻璃球还奇怪的东西，而人们这样前进，行见其愈弄愈繁，直待那位哥白尼来到，一扫而光，说道：还是承认地球是旋转的比较简单些。

我们的哥白尼曾经对我们说过，假定地球旋转是较为便利的，因为人们可用比较很简明的言语说说许多天文学定理；同样那位哥白尼则说：假定地球旋转是较为便利的，因为人们可以用比较很简明的言语表达力学的定律。

然而绝对的空间，意即我们借以观察地球是否旋转的标准，并不因此而毫无客观的存在性。因此“地球旋转”这个断语，是毫无意义的，因无一实验可以核验这个事实；因为像这种的实验，不单不能实行和不能被思想之奇异有如魏勒的所能梦想，并且即想到时，亦难免有矛盾；或用这两个命题：“地球旋转”与“假设地球旋转较便利”都具有同一的和唯一的意义；而在两者之中再没有别的了。

或者人们还不以此为满意，且已觉得在所有的假设中或在我们关于此题所能做的所有公约中，何以其中竟只有一条是较其他为便利，这个道理似乎使人不舒服。

但如遇到是属于天文学的定律时，人们就很容易容纳它，那么属于力学时，人们就何故觉得讨厌呢？

我们已知物体的坐标是由二阶微分方程式确定的，而这些坐标之差数，亦是这样确定的。这就是我们所谓广义的惯性原理与相对运动原理。如这些物体的距离也同样是用二阶方程式确定的，则人们似乎应当完全满意了。试问在何种分寸之下人们才得满意，为什么他不肯迁就呢？

我们要明白这后，不如举一个简例。我假定有一个与太阳系相似的系统，但从这系统中，人们不能看见系统外之任何恒星，因此天文家仅能观察太阳与其行星之相对距离。而非行星的绝对经度。我们如直接从牛顿定律中，推出那规定距离变动的微分方程式，这些方程式将非二阶式了。我的意思就是说，除了牛顿定律之外，假使人们已知这些距离在初时的值，及其对于时间的导数，这还不足决定这些距离在以后任何时间之值。还缺一个数据，而这也许就是天文家所谓面积常数。

然此地人们可以从两个不同的观点来区别两种常数。从物理家的观点，世界不过是一连串现象，这些现象，一方面只依存初时的现象，一方面只依存那些联络后果与来因的定律。于是如果观察告知我们某数量为常数时，我

们在两种观察的方式中就有一个选择了。

或者我们承认有一种定律，按这个定律，那数量是不能变的；然在世纪之初，它恰恰的不是别数而的确是这数，而且这数一直保存至今，那完全是偶然的事。所以这个数量可以叫做偶然常数。

或者我们反而承认有一自然的定律，它对那个量支配了此数而非彼数。所以我们又有个所谓本然常数。

例如照牛顿定律，地球公转的周期，应当是个常数。然这数却等于 360 天有余而非 300 或 400 天，这个缘故，我可说是一种莫名其妙的初时偶然。这是一种偶然常数。反之假使在吸力表达式中的距离指数是等于－2 而不等于－3，这并非因偶然，却是因为牛顿定律要如此的。这是本然常数。

我不知道这样说明偶然含义对其本身是否合法，也不知道这种区别是否有点人为色彩；但至少可以确信的是，当自然界尚含有秘密时，那末它在应用中将是很任意的，并且总是不稳定的。

至于面积常数，通常我们总认为偶然常数。不知我们理想的天文家也同我们一样设想否？他们如能比较两种不同的太阳系，他们或将可觉得这个常数可有许多不同的值，然起初时，我恰恰就已假定他们的系统是孤立的，并且他们不能观察系外的任何恒星。在这情形之下，他们仅能有唯一的常数，有唯一的值，而绝对不变的；它们一定还会把它认为本然常数。

为免去一个反驳起见，我顺便还说几句：在这个幻想世界的居民，既不能像我们观测又不能规定那面积常数，因为他们不能捉摸那些绝对经度；但这并不会妨碍他们很快地注意到某一种常数，这常数自然地引导在它们的方程式中，而这不是别的，就是我们所谓面积常数。

然这样又出事了，且听我说来。如果面积常数是认为本然的，因为它依伊于一自然的定律，那末如要针算那些行星在某时的距离，只要知道在初时这距离之值，及其一次导数之值。在这新的观点上，那些距离将由二阶微分方程式规定。

但这些天文家的意思认为完全满意否？我不相信。第一当他们计算逐渐高阶的微分方程时不久就看到这些方程式大为化简。最使他们注目的，就是来于对称性的困难。于是又要承认许多不同的定律，这要随这些行星的集团是某种多面体形或是对称的多面体形而定，人们如要免去这个后果就非得承认面积常数是偶然的不可。

我所举的例是很特别的，因为我所假设的天文家完全不管地球上的力学，而他们的眼界只限于太阳一系。然我们的结论却能适合于任何情形。我们的宇宙是比他们的广大，因为我们还有恒星，但它也是有限的，于是我们对于我们的宇宙全体，可做一种推理，正如这些天文家对于他们的太阳系做一种推理一样。

由此人们可见，结果我们不得不结论那规定距离的方程式的阶数是高于二的。那末我们何以感觉得诧异，为什么我们觉得各现象之次序依赖这些距

离在初时的一次导数值为自然，而我们对于它们依赖二次导数之初时值就疑惑呢？这不能不是因为我们常常研究广义的惯性原理及其后果所养成我们的一种习惯了。

在某定时的距离之值依赖它们的初时之值，它们的第一次微导数，以及其它。这其它是什么？

人们如不愿意这个简单就是二次导数中之一，人们只可选定一种假敲。有如通例，假设这其它便是宇宙在空间的绝对方向，或此方向变动之速度，这也许是的，这一定是几何学家认为最便利的解答；但对于哲学家，就不见十分满足了，因这方向是不存在的。

人们可以假定这其它是些不可见的物体之位置或速度；这确是有些人做过的，并且叫它阿尔法体，虽然我们对这物体还只知道它的名称。这个巧法正与前章末了我说到惯性原理时的巧法完全相似。

总之困难是人为的。只要我们仪器的将来的指示仅依以前已经给与我们的或从前本可给与的指示，那就一切都够了。但在这种情形之了，那我们尽管放心好了。

## 第八章　能与热力学

能的系统——经典力学所引起的许多难点曾引起某些学者偏爱另一种新的系统名曰能的系统。

能的系统产生于能之守恒原理发现之后。亥尔莫慈给了它一个最后的形式。

人们开始去规定对此原理起基本作用的两种数量。这两种数量：一种是动能或活力，一种是势能。

自然界中各种物体所能受到的一切变态总是由下面两种实验的定律统辖的：

一、动能和势能之和是一常数。这就是能之守恒原理。

二、如某物体之系统在 $T_0$。时之情形为 A，在 $T_1$ 时之情形为 B，则它由第一情形至第二情形时总必选走一条路，这路使在分开 $T_0$ 与 $t_1$ 两时期之间隔时期中两种能量的相差数的平均值为最小。

这就是哈密尔敦原理，这是最小作用原理之一种形式。

能的理论比较经典的理论有下列优点：

一、这个理论比较完全，就是说能之守恒原理与哈密尔敦原理所能告诉我们的比经典的理论之基本原理为多，并且它们排除了某些自然界所不能实现的运动，但这些运动是与经典的理论相容合的。

二、这个理论省却我们的原子的假设，而在经典的理论中，这假敲几乎是不可避免的。

但这个理论也引起许多新的困难：

那二种能的定义之不易规定同在第一系统中力与质量的定义之不易规定相差极少。然而人们对此究竟较易解决，这至少是在最简单的情形中如此。

设有一孤立的系统是多数物质点所组成的，我们假定这些点子受制于一些力，只依存于它们相对的位置与相互的距离，而非它们的速度。按照能之守恒原理，应该有一个力函数。

在这个简单的情形中，力之守恒原理的陈述是简单极了。可由实验测定的某数量该是常定的。这个数量是两数项之和，其一仅依存于物资点之位置，而与其速度无关；其二是与其速度平方成比例。做这种分解只能有一种方式。

这两数项之第一项我叫它 U，即势能；第二数项我叫它 T，是即动能。

今如 T＋U 为常数，则无论什么 T＋U 的函数，即

$$\phi(T+U)$$

自然也必如此。但这个函数φ（T＋U）将不是这两数项之和：即一项是不依赖速度的，一项是与速度平方成比例的。在固定不变的函数中唯有一种函数具此性质，即 T＋U（或 T＋U 之线性函数，这是不要紧的，因为用单位与原点之变换法，这个线性函数总可变成 T＋U 的）。于是这就是我们所称的能；其第一项我们叫做势能，第二项则为动能。所以这二种能量的定义可以毫不混淆地一直推究下去。

物之质量的定义也是如此。动能可很简单地用一切物质点对于其中某点之相对速度及其质量来表明。这些相对速度是可以观察的，而一待我们有了以这些相对速度为变数的动能之表达式，则由这表达式的各系数可求出质量。

所以在这简单的情形中，我们不难对一些基本概念下定义。然在较繁的情形中，则困难重生，例如力有时不单依存于距离，且与速度有关。又如魏北假定两电分子之相互作用不仅依存于它们的距离，且与其速度及加速度有关。如果物质点之相互引力也依照与这个相似的定律，则 U 必依存于速度而它可能包含一个与速度平方成比例的数项。

然而在与速度平方成比例的数项中，怎样辨别来自 T 或 U 的数项呢？因此又怎样区别这两部分的能呢？

还有，能的本身又怎样下定义呢？倘若 T＋U 的特性、即其为一特别形式的两数项之和之特性消失了之后，则我们毫无理由以 T＋U 而非其他 T＋U 之函数为定义。

然这还不算数，我们不单要留意纯粹的机械能，此外还要计算别种形式的能，即如热、化学能、电能等等。故能量守恒原理当以下式表达：

$$T+U+Q=\text{const.}\ (\text{常数})$$

其中 T 代表可感觉的动能，U 为位置的势能，而只依赖物体之位置，Q 为分子内部之能，其形式则或为热的，或为化学的，或为电的。

如果这三数项都是绝对不同的，如 T 与速度平方成比例，U 与这些速度及物体之物态无关，Q 与速度及物体之位置无关，而只依赖其内部的物态，

则一切均可顺利进行。

能之表达式只能用此唯一的方式分为这三数项的形式。

其实并非如此。假定有几个荷电的物体：其相互作用所生之静电能当然依存于其所受电荷，即其物态；然而它同时与物体的位置也有关系。如果这些物体都在运动中，则彼此必生电动力作用，而电动能不特依存于物态和位置，且与其速度有关。

所以我们再也没有方法可以抽出某某数项当属于 U 或 Q 或 T，而把这能量之三部分划清楚。

倘若（T＋U＋Q）是常数，则其任何下列函数亦然。

$$\phi(T+U+Q)$$

倘若（T＋U＋Q）是我上面已考虑过的一种特别形式，则结果亦不致有混淆；在为常数的诸函数φ（T＋U＋Q）中将只有一函数具有此种特别形式，而正就是这个，我约定叫做能。

但我已经说过，实在并不是严格如此的。在为常数的诸函数中，没有一个可以严密地化为这样特别的形式；然则怎样在这些函数中选择那个该当称为能的函数呢？我们再也没有什么可作我们选择的指导了。

我们只剩了一个能之守恒原理的陈述；那里有个东西是常定的。这样说法，这个原理也脱离了实验之攻击，而变成一种重复语。显然假使世界受定律统治，则其中有些数量自必是常定的。以实验为根基的能之守恒原理，有如牛顿的原理，并且为了相似的理由，也不会被实验所否定的了。

这个讨论指出由经典的系统来到能的系统，人们已经获得一种进步；但它同时也指出这个进步还是不够的。

我认为还有一个反驳更重要：就是最小作用可应用在可逆变的现象中；而在不可逆变的现象中就不能应用。亥尔莫慈想把它推广到不可逆变的现象中，但是没有成功，这也本是不能成功的，在这种情形之下，一切还待努力。

甚至最小作用原理之陈述本身也有点抵触理智。譬如强制在一面上运动而脱离了一切外力的物质分子要从此点来到彼点时，将取道于此面上之短程线，即路径之最短者。

这个分子似乎自己知道人家将要引它到某点去，能预算从某路线达到某点当费时若干，然后再拣定最适当的路径。照上面的陈述看来，这个分子似乎是能动而自由的生物了。顾然最好把这陈述换一个比较少抵触理智的陈述，而那里，有如哲学家的口气。最后因不像是去代替实效因。

热力学[①]——热力学中两大基本原理在自然哲学中的作用日见其重要了。我们放弃 40 年前的那些充塞着分子假设的野心的理论，我们今日想把数学物理全部大厦建立在唯一的热力学上。试问克鲁秀士与梅耶之二原理可作它的巩固的而有些持久的基础么？这是无人怀疑的，但这个信心是从何而来

[①] 下文系我所著热力学一书中序文之一部分原文。

的呢？

某日有一位高明的物理学家和我谈到误差律时曾说，大家所以都坚决相信它的缘故，是因为数学家以为这是观察的结果，而在观察者以为这是数学的一定理。能之守恒原理很久就是经过了这种情形。今日则不然。没有人不知道这是实验的事实。

然则是谁给我们的权力，让我们对这原理看成比那些证明这些原理的实验更为精确、更为普通呢？这个问题好比人家常常在那里问推广经验的数据是否合法，但我却不敢讨论这个问题，因为已经有许多的哲学家想解决而终于未能。唯有一事是确实的：就是如果我们没有这个能力，则科学将不能存在，或至少要化成一种财物清单，一种孤立的诸事实之观察，这样则科学对于我们将是毫无价值，因它将不能满足我们对秩序及和谐之要求，且它同时也将无预见之明了。由于在一件任何事实先前的种种情况大概永远不会同时统统再产生，这就已经应该作第一次推广，来预测当这些情况有一点点变动时，那事实是否还能重新发现。

然而凡是命题都可用无穷的方式来推广。在一切可能的推广中，我们一定要有所选择，而我们只能取那最简单的。所以我们被引到这一行动的方针，就是认为一个简单的定律（虽然其他一切都是一样），好像总比复杂的定律为可靠。

五十年前，人们已老实承认这点了，并且宣言自然界欢喜简明；然而从那时起自然界已给我们极多的反证。现在人们已无此种倾向，而只保留那不可缺少的，使科学不致成为不可能。

经过比较上不算多而表现某些分歧的若干实验，来形成一种普遍的、简明而准确的定律的时候，我们所干的只是服从了一种需要，这种需要是人的理智所不能缺少的。

然而此外还有一层，所以我还要论列。

没有人怀疑从一切特殊的定律中引出的梅耶原理比这些定律要广泛，有如从凯普勒诸定律中引出的牛顿定律要比它们广泛，它们只是近似的，假使我们计及摆动作用。

为什么这个原理在一切物理的定律中占据一个特别重要的位置呢？其中颇有许多的小理由。

第一，人们相信我们除非承认永恒运动之可能性的时候，才能推翻这个原理或甚至怀疑它的绝对严密性；不必说我们对于这种远见是抱怀疑态度的，而我们自信对于这个原理与其否认不如承认它为妥当。

这也许不完全正确；由永恒运动之不可能性，虽可导出能之守恒原理，然这仅限于可逆现象。

那梅耶原理之简明性也有助于加强我们的信心。由实验直接引出的定律，例如马略特定律之简明性反会使我们不信任。但此地则不然，乍看上去，我们只见到一些不调和的元素在那里排成一种出乎意外的顺序，而形成一个

和谐的整体；而我们决不相信这种出人意料之和谐简单地是偶然的效果。这好像是我们牺牲的力量愈大，我们所获得的胜利愈是宝贵，或者说那自然愈怕我们去揭露它的秘密，我们就愈确信已经从它那里抢得了真秘密。

然而这还不过是些小理由；如要把梅耶定律建立为一个绝对的原理，那就还要经过一番更深刻的讨论。但人们如去试行，人们就看到这绝对的原理，连陈述它也不是容易的事。

在每一个特别情形中，人们可看清楚能是什么，并且至少可给它一个暂时的定义；但要找出一个普遍的定义，那就不可能了。

假使要把这原理尽量普遍化地陈述出来，并且应用之于宇宙间，那便可说它竟会消失了，而剩下的只是：其中有些东西是常定的。

但连这句话也有意义吗？据确定派的假设，宇宙的状态是用极大数目之 n 个参变量规定的，我叫它们 $x_1$，$x_2$……，$x_n$。人们在任何时，一知道这 n 个参变量之值，也就知其对于时间之导数，由是就可计算这些参变量在先前或以后之值。换言之，这些 n 参变量可满足 n 个一阶微分方程式。

这些方程式有 n－1 积分，故亦有 n－1 个含有 $x_1$，$x_2$……，$x_n$ 之函数，且为常定的。所以假使我们说其中有些东西是常定的，我们所说明的只是重复语。我们甚至很难说在这些积分中，那一个当保存能之名称。

然而当人们把梅耶原理应用在有限止的系统中时，人们对于这原理并不是这样来理解的。

于是人们承认在我们所说的 n 参变量中的 p 个各自独立的变动，因此我们只有这 n 参变量及其导数间 n－p 的关系，这关系一般是线性的。

为简化陈述起见，假定外力工作之总和为零，向外播散之热亦然。于是且看我们的原理的意义何在：

在这些 n－P 关系式中，有一种组合，其左项为全微分；于是根据我们那些 n－p 关系式这个全微分既为零，则其积分为常数，而就是这个积分我们叫做能。

然而其中怎会有许多的参变量是各自独立变动的呢？这种情形只有在受外力的影响下才能产生（虽然为简便起见，我们已假定这些力的工作之代数和为零）。事实上如这系统完全脱离一切的外力，则我们的 n 参变量在某定时之值已足拿来规定那系统以后任何时间的情态，但只要我们常守看确定派之假设；因此我们又和上面一样，遇着同一的困难了。

某系统将来之情态所以不完全为它现在的情态所确定，是因它还要依存于系统以外的物体的情态。然则在规定这系统的情态之诸参变量 χ 中，存在着许多与外物之情态无关的方程式是可确信，而如在某些情形中，我们相信能够找到若干方程式，这是否只因为我们的无知，并因这些物体的影响太微弱，以致我们的实验不能发觉呢？

如果这系统不是认为完全孤立的，则其内能之严密精确的表达式当与外物情态有关。并且在上文中我是已经假定这外力工作之和为零，而我们如要

免除这个有点人为的限制，则更不易陈述了。

所以为要建立梅耶原理，而给与一个绝对的意义，那就应该把它推广于全宇宙，但这样我们正要避免的困难又呈现在面前了。

总而言之，且用普通的说法，能之守恒定律只能有一种意义，此即在一切可能的意义中有一共同的特性；然依确定派的假设，只有唯一的可能，因此那定律便毫无意义了。

反之依照不确定派的假设，即使人们把它看做有一个绝对意义的，那定律将仍有一个意义；这定律好像是加在自由上的一种限制。

然而自由这个字，警告我跑错了路，而且我决要跑出数学与物理的范围之外了。所以我停止，而在这番讨论中，我只要保留一个印象，就是梅耶定律的形式是相当柔软以致能够让人任意将差不多一切都放进去。我的意思不是说这定律毫无客观的实在性，也不是说它只是一种重复语，因为在每一个特殊情形中，且只要人们不去一直推到绝对，它总有一十分明白的意义。它这种的柔软性，更足以使人相信它的持久，并且，在另方面，既要等它溶化于更高级的和谐之中才得消灭，我们可以安心地依靠它而去工作，并且可以预先确信我们的工作决不会白费了的。

上面我所说过的几乎全可应用于克鲁秀士原理上。它的特点是在于用不等式表达出的。或者人们将说一切物理的定律统统是如此的，因为它们的精密程度总是被观察上的误差所限止的。但它们至少自命以第一次近似的姿态出现，而人们有希望将来可用逐渐精确的定律去慢慢地代替它们。但克氏原理之所以化为不等式，并非由于我们观察方法之不完善，而是由于这个问题之本身性质的原故。

第三部总结。

所以力学诸原理对我们以两种不同的姿态表现出来。一方面，这些是建立在实验上的真理，对于差不多孤立的系统可算是核验得很近似的了。另方面，这是些可以适合于宇宙全体而且被认为严格真实的公设。

这些公设，其所以有一种普遍性与确实性，而这反为它们所自出的实验的真理所缺乏者，正因为它们到最后分析便化为一种简单的公约，而这是我们有权做的，因为我们预先可以确信它是不会受任何实验所反驳的。

不过这种公约并非绝对任意的；它不是由我们的私意而出；我们采用它，因为有些实验向我们指出它是便利的。

这样人们就可解释实验如何建立了力学诸原理，但实验又为什么不能推翻它们。

我们试用几何学来比较。几何学中基本命题，例如欧几里得公设，也不过是些公约，但如要问它们是真的，或是假的，则其不合理正如问米达制是真的或是假的了。

不过这些公约是便利的，而这是若干实验告诉我们的。

起初这个相似性是完全的；实验在这两者之中似乎有同样的作用。所以

人们会想说：或者力学当认为一种实验的科学，因此几何学亦必如是，或者相反地几何学是一种演绎的科学，因此人们对于力学也可这样说。

像这种的结论未免不合法了。使我们认几何之基本公约为较便利而采用它的那些实验所根据的对象完全与几何学所研究的对象不同；这些实验是以固体之特性及光线直线性为对象的。这些都是力学的实验，光学的实验；而无论用何种名义，也不能把它认为几何学的实验。就连我们的几何学对于我们觉得便利的主要原因是因我们身体的各部、眼睛、四肢正具有固体的性质。照这样说，我们的基本实验就是生理学的实验，所以实验的并非空间，这空间是几何家研究的对象，而所实验的是在身体上，也就是他研究几何时所需用的工具。

反之，力学的基本公约以及证明它是便利的那些实验，都有同一的或相似的对象。公约式的而普遍的原理是特殊的与经验上的原理之直接而自然的推广。

我希望人家不要说我在科学间划出界线来；而假使我把固体的研究与纯粹的几何学隔开，我照样也能在普遍原理之公约式的力学与实验的力学两者中间另立一种界限。事实上我若把这两种科学分开时，说不见到我就会把它们都伤害了，而公约式的力学一孤立之后，将只剩很有限的东西，而绝不能与这伟大的学说即所谓几何学相比呢？

现在我们可以明白为什么力学的讲授还是应该为实验的。

只有这样才能使我们明白科学的萌芽，而这对撤底明白科学之本身是不可少的。

而且我们研究力学，是为了应用；而如要应用它，则它非是客观的不行。但是根据我们所已经说过的，凡是那些原理在普遍性上与确实性上有所得，在客观性上便有所失。所以要紧的，是在把原理的客观性方面及早熟悉，而这要从特殊的到普遍的而不去取相反的步骤才能做到。

凡原理都是些伪装的定义与公约。不过它们仍是由实验的定律引出，故这些定律可说是用我们认为有绝对价值的原理树立起来的。

有些哲学家未免推广得过分了。他们以为原理就是全部科学，因此以为全部科学乃是公约的。

这种荒谬的学说，所谓唯名主义，实在不值一谈。

一个定律怎会变成原理呢？它能表明 A 与 B 二项间之关系。然这定律不是严格真实的，它只是近似的。我们任意地加进一个多少是幻想的中间项 C，而照定义 C 即是与 A 恰好有为定律所表示的关系的那一个。

于是我们的定律分解为二 其一表示 A 与 C 之关系的绝对而严密的原理；其二，表示 C 与 B 之关系的近似的而可修正的实验定律。显然地尽管我们再继续的分解下去，所剩下来的还是一些定律。

我们现在到真正的定律范围中去。

# 第四　部自然界

## 第九章　物理学中的假设

实验与推广之作用——实验乃真理的唯一泉源：唯独它能告诉我们一些新事物；唯独它能给我们一种确实性。这就是谁都不能反对的两点。

然则假使实验包括一切，则数学的物理学的地位又将怎样呢？实验物理学要这个好像无益的并且甚至危险的助手又有何用呢？

但是数学的物理学还是存在着，它所完成的功劳又是不可抹杀的；这里必有一种事实要说明的。

这就是单单去观察是不济事的，必要利用这些观察，因此所以要推广。这正是一向人家都做过的；不过因为想起从前的错误，有了前车之鉴，人家就渐渐地格外慎重，多从事观察而逐渐减少推广了。

每一世纪的人总喜讥诮前世纪的人，怪他们推广得太快又太老实了。笛卡儿曾可怜那些伊洪学家；然而笛氏自己又惹我们微笑，而我们的子孙必将讥笑我们，这是无疑的。然则我们难道不能马上走到尽头吗？这不是我们免去所预料的遗笑之方法吗？我们不能将赤裸裸的实验认为满足吗？不，这是不可能的；这样未免太不懂得科学的真正特性了。凡是学者应当做整理的功夫，人们靠看事实建设科学，正如用砖石筑成房屋；然而许多事实之不成其为科学，正如一堆砖石之不成其为房屋。

并且最要紧的，学者应当有预见之明。高立尔某处曾经说过：“唯独事实是要紧的；法王约翰无土曾经过此地，这真是件很可赞美的事，为此事实我愿给出天下所有的理论”。

高立尔是培根的同胞；但培根却不会这样说。这是历史学家的口吻。物理学家就要这样说：“法王约翰无土曾经经过此地；但这与我毫无关系，因为他再也不会经过此地了”。

我们大家都知道有好的实验，也有坏的实验。假若是坏的，那就再多也是无用的；人们做它一百个也好，做它一千个也好，经不起一位真正的学者，例如巴斯德做的一种工作，就可把那些实验都压倒，甚至于忘掉。我想培根是很明此理的，是他发明那“交叉实验”名词的。但这是高立尔不会懂得的。事实便是事实；一个小学生毫不注意地读下了温度计的度数；不管他注意不注意，横竖他已经读过了，但如只以事实算数，那么这里是和刚才法王约翰无士远游这回事同样地是实在了。何以那位学生做的这件读数的事实没有意思，而若是一位能干的物理家读了另一数的事实就将是很重要呢？这因为前者所看的度数，我们丝毫无可结论。然则何为好的实验？好的实验就是除了一件孤立的事实外，还能告知我们别的东西；这就是使我们能够预见，亦即能够让我们推广的一种实验。

因为若无推广，别预见是不可能的事。在某些境况下，人们做了实验，

但这些境况从来不会完全再发生。所以观察过的事实，以 后再也不会开始了；人们所能肯定的唯一事情，就是在相似的境况之下，当有一相似的事实发生。可见想要预见，至少要引用相似性，这就是已经推广了。

人们无论如何胆小，总要去内插；实验只给我们一些孤立的点子，要用一条连续的线把它们接合起来；这里是真正的推广。但是人们做的更多，这画出来的曲线，是在这些点子之间和附近穿绕而过的；并非恰恰地通过这些点子。所以我们不仅自限于推广实验，并且还要矫正它：凡是不愿做这种的修正，而以赤裸裸的实验为满足的物理学家势必说出许多离奇的定律来。

所以，赤裸裸的事实对于我们是不够的；因此我们要有经过整理的科学，即有组织的科学。

人们往往说，做实验必不可存一种成见。这是不可能的；这样不但一切实验将变为废物，并且似乎人们情愿把它变为不可能的了。各人有各人的世界观，而不易改观。例如，我们是用言语才能有所表白，而我们的言语中充满的正是这些成见。却也不能有别的。不过这是些不知不觉的成见，真比别的还更危险一千倍。

我们可以这样说，如果我们加入了一些我们完全自觉的其他成见，我们只会更加重坏处！我不相信，我想这些或可做为相互平衡的权重，我将说这可作为解毒药；它们相互之间总是合不好的；它们彼此必互相冲突，因此我们不得不把事物反复从各方面去仔细考察。这样已足使我们获得自由：好比能够选择主人，就不再是奴隶了。

这样，靠着推广，每一观察的事实可使我们预见许多的事实；不过我们不要忘记只是第一事实是确实的，其他的都不过是大概的罢了。一件预见之事，看上去无论怎样稳固地奠定，当我们去核验它的时候，我们从来不能绝对相信它不会被实验推翻的。但这可能性往往是很大，以致我们实际上可以认为满足。与其毫不去预见，还不如去做不确实的预见。

所以有机会的时候我们万不可不屑去做一番核验的功夫。但凡实验都是很长很难的，而勤力的人是不多的；而我们所需要预见的事实为数正是无穷；我们所能做的直接核验的数目对于那样大的数量真同沧海一粟。

我们希望从我们所能直接达到的这一些实验中抽出最好的效果；应该每一实验能给我们最多的预见和尽量地合有最大的可能性。这个问题可以说是在于增加科学机器的效率。

请试以科学与日益扩充的图书馆相比；图书馆馆长的经费既不充裕；馆长应当不浪费。

这是实验的物理学负买书之责；所以唯独它能使图书馆丰富起来。

至于数学的物理学，其任务在编订书目。而书目编得再好，也不能使图书馆增加财富。但它能有助于读者之使用其丰富的藏书。

而且它可把藏书缺点之所在指示图书馆长，使他下次购书格外恰当合理；此事在经费愈少时愈是要紧。

这就是数学的物理学的作用；它应当指导推广以增加我刚才所说的科学机器的效率。但它用何种方法以达到此目的，且怎样安全地去做，这是还要讨论的。

自然之统一性——首先我们要注意一切推广，在某种程度上，假定对自然界之简明性与统一性有信心。关于统一性，这个问题不会有何困难。如果宇宙之各部分不是像一物之各机构，则互相不生作用，它们将相互不认识；而尤其是我们将只能知其一部。所以我们就不必问那自然是整个的，而是问它何故是整个的。

关于简明性这个问题，就不是这样容易的了。自然界不一定是简明的。我们可否当它是这样的去做而无危险呢？

从前马略特定律之简明性一度被引为此定律的正确性之论据；从前弗勒纳尔自己有一次与拉卜拉斯谈话时，曾说过那自然界毫不顾虑解析上的困难，后来他恐怕抵触群意太甚，又自觉非加以解释不可。

今天一切观念都大变了；但那些不相信自然界的定律一定是简明的人仍旧不得不作为相信似的干下去。他们不能完全脱离这个需要，除非是把一切的推广，因而一切科学都弄成不可能。

一件任何事实显然可用无穷的方法来推广，但要紧的是选择；而选择只能以简明为标准。我们试以最平常的例子如内插法作比。我们在观察所给与的点子之间，穿过一条尽可能整齐的连续线。为何我们要免去这些角点，以及太急促的屈折呢？为河我们不在那曲线上画出最任性的弯转曲折之形？这因我们预先知道或我们自信知道，那要表示的定律不能如此复杂的。

木星的质量，可以或由它的卫星运动测知，或由那些大行星之摄动测知，或由那些小行星之摄动测知。我们如将此三法所测定数平均，乃得三个近似而各异文数。说明这个结果时，我们可以假定引力系数在这三情形中是各不相同；因此对观察所得的结果当然表示较好。然则我们为何舍去这种解释而不用呢？这不是因为它荒谬，实因它是无用的繁复。要到了不得已不采用它的时候，我们才去采用它，现在还不必。

总之，普通凡是定律总被认为简明，一直要碰到相反的证明才止。

这个习惯之所以支配着物理家，已如我刚才所说；然面临着这些天天指示我们以更复杂而更丰富的细节的新发现，怎样使这种习惯合法化呢？而且如何把它与自然统一性的情绪相融洽呢？因为倘若一切以全体为转移，则这样多的不相同事物参加的各种关系必不再能简明了。

我们试研究科学的历史，我们可见到两种可说是相反的现象：有时是简明藏匿在复杂的外表下面，有时相反地简明是表面的而它却是隐蔽着非常复杂的真实。

那有再比行星的摄动运动更复杂；那有比牛顿定律更简明呢？这正如弗勒纳耳说过的自然界在那里玩弄解析的困难而只用一些简单的方法，经过彼此互相组合之后，就发生一种不可言喻的难解乱丝。简明正是藏匿在这里，

正应当去发现它。

相反的例子也多极了。在气体运动理论中，人们考虑具有极大速度的分子，它们的轨道，受不断的冲击，变成最奇怪的形状，并且在空间四面八方都布满了它们的路迹。可观察到的结果，就是马略特简明定律；每一种个别的事其实是复杂的；大数定律恢复在平均中的简明性。这里的简明只是表面的，而我们感官的迟钝，正是阻碍我们不能见到此中之复杂。

好多的现象都是服从一种比例的定律；何故？因为在这些现象中，有一些东西是很小的。因此所观察得的简明的定律，不过是这种普遍的解析规则之翻译：照这规则，某函数之极微小的增量与其变数的增量成正比例。实际上，我们所谓极小的增量并非极小，不过是很小罢了；所以比例的定律也无非是近似的，而那种简明只是表面的了。我刚才所说的，可以应用到微小运动之叠加规则上，这条规则用处极大，且是光学的基础。

至于那牛顿定律本身呢？它的简明性隐匿得这末长久，也许只是表面的。谁知道它不是一种复杂的力学作用，或生于一种受不规则运动的微妙物质碰撞之影响，谁知道它不是只靠着大数与平均数的一套把戏才能成为简明呢？无论如何，若不假定那真正的定律含有补充的数项，是很难的，这些数项在短距离时，便有效用。假使在天文学中，它们比牛顿公式中之数项来得可忽略，而如定律因此又得到它的简明性，那么这只因为天空中的距离极为巨大的关系。

无疑的，假使我们观察的方法日渐精密，我们便可在复杂的里面找出简明的东西，再由简明里面找出更复杂的东西，如是循环不已，我们便不能预料最后将是什么。

在这个进程中，我们势必要停留在什么地方，而为了科学可能起见，在遇到简明的地方，就应该停下来。这里正是我们唯一的地盘，在这上面我们才能建设一切的推广。然而这简明既只是表面的，这块基地是否能够坚固呢？这是应该研究的。

为此，请看简明性之信心在我们的椎广中起何作用？今我们已经在许多特例中检验了一条简明的定律；我们不承认这常有的遭遇只是偶然之事，因此我们结论那定律在普通例中也应当是真实的。

凯普烈注意到狄哥所观察的一行星的位置都是在同一的椭圆上。他从未想到狄哥因一种奇怪的偶然每次观天时，都是正当那星球真正的轨道与那椭圆曲线相交的时候。

所以简明性是实在的或者它隐藏着一种复杂的真理，这有何关系？不管它是消去各个别相差的大数的影响之作用，或者是可以略去几个数项的若干数量之大小的作用，无论如何，它总不是偶然的作用。这种简明是表面的，或是实在的，总有一个原因在。所以我们总可做同一的推理，且如一简明定律曾经在好几个特例中观察过，我们便可很合理地假定它在相似的情形中还是真实的。我们若对此否认，那就是给偶然以一种不可承认的作用了。

但是其中有一个区别。如果那简明性是实在而深刻的，则我们的测量工具的准确无论如何进步，则这种简明性仍旧不会摇动；所以我们如果相信自然界具有深刻的简明性，则我们也该从一种近似的简明性结论到严密的简明性。这是从前人们做过的；这是我们现在再无权去做的了。

譬如，凯普勒定律之简明性不过是表面的。这虽无碍于它对于一切如太阳系之系统大约都可适用，但要说它是严密真实的，那就不能了。

假设之作用——凡是推广都是一种假设；所以假设有必需的作用，这是谁也不会反对的。不过它应当常常的经过核验，并以愈早愈多为妙。不必说，它如经不起这种考验，人们就当不惜把它抛弃。普通人们是这样做的，但有时总带几分不高兴。

其实就连这种不高兴也是不合理的；物理家当他抛弃他的假设之一的时候，应当反而十分快活，因为他正是得了一个求之不得的发明的机会。我想他的假设不是轻易采用的；它已经顾及到一切好像能参与现象的各已知因素。假使不能核验，这其中必有料不到而非常的事；这正是我们要去寻觅的未知与新鲜的东西。

那么这样推翻的假设是无效果的么？大为不然，我们可说它比真正假设的功劳更大；不但它是一种决定性实验的机会，并且人们若不曾作假设，只在偶然中作了这个试验，则人们将一无所得；人们将不能见得非常的东西；人们不过多编进了一件事实，而不能从中得到什么后果。

现在要问在什么条件之下利用假设，方不致有危险？

单单决心去实验是不济事的；此外还有危险的假设；最主要的就是暗示的与无意识的假设。我们既是不知不觉的作了，因此也无能力抛弃它。这里还是数学的物理学可以协助我们。以它固有的那般精确性，它迫使我们确立一切不用它我们也会做的假设，但我们并不怀疑它。

另方面，我们当注意不可滥用假设，并且只能依次而用。我们如果把一理论建立在许多的假设之上，一旦被实验推翻，则在吾人所有的前提中当换去哪一个呢？这是不得而知的。反而言之，如果实验成功，人们可相信所有的假设都被核验了吗？人们相信只用一个方程式就求得了几个未知数吗？

此外还要好好地把各种的假设区别一番。第一，其中有一种很自然的假设，是我们所难于免去的。比方我们不能不假定那很远的物体之影响完全可以忽略，那微小运动是遵守线性定律的，又如效果乃其原因的连续函数。我对于对称定律所支配的条件，认为也是这样。所有这一切的假设，可以说是组成数学的物理学所有的理论之共同基础。人们到最后才能把它们舍去。

此外还有第二类的假设，姑名之曰无关的假设。在大多数问题中，分析家在演算之初便假定物质是连续的，或反是原子所组成的。无论他做哪一种假定，其结果则一，不过求得有难易而已。所以如果实验证明他的结论时，他就以为证明了原子是真实存在的吗？

在光学中有两种矢量。其一是认为一种速度，其一是认为旋涡。这还是

一个无关的假设，因为我们如把它们调换过，结论还是一样；所以实验之成功不能证明第一矢量果为速度；它只证明一事，就是这是一个矢量；这是我们在前提中所加入的唯一的假设。要给它一个我们理智的薄弱性所要求的这种具体外表，那就应该或者把它看做一种速度，或者是一种旋涡；正如我们应该用 x 或 y 字来表示它，但结果无论如何，并不证明把它当做速皮是对了或错了；正如叫它 x 或 y 时不见得就对了或错了一样。

这些无关的假设，只要我们认识它们的特征，是永不危险的。它们是能够有用的，这或者作为计算的技巧，或者用具体的形象来支持我们的意识，正如人说为固定思想起见，所以这些是无须禁止的。

第三类的假设是真正的推广。正是这些假设是实验该当证实的或否认的。不问是核验了或推翻了，它们可能是丰产的。然而为了我说明过的理由，非得我们不增加它们的数目才能够是这样。

数学的物理之起源——我们现在要进一步仔细去研究那些开展数学的物理学的条件。我们第一就看出一般学者总是勉力去解决实验直接给与的复杂现象，要把它分解为许多基本的现象。

这有三种方法：第一，是在时间里的。与其把现象的逐步发展作全部的包罗，人们宁愿把某一时刻与前一时刻相连接起来；人们承认世界的现在情形只依存于最近过去的时代，而不直接受可说过去已久的记忆之影响。根据这个公设，与其去直接研究现象一切过程，人们宁可只写出它的“微分方程式”；人们把凯普勒定律代以牛顿定律。

其次人们想法在空间里分解现象。实验所给我们的乃是一个纷乱的事实，表演在一定的广延的戏台上；要设法去辨别那些基本的现象，这现象反而是局限在空间的极小的部分。

举几个例子就可说明我的意思。今有一慢慢地冷却下去的固体，要去研究其中温度分布的一切复杂情况是永世微不到的。只要想一想那固体之一点不能向远隔的一点直接传热，那么一切都变为简单了；它只能传热于最贴近的点，再由这些点逐步传开去热流才传到物体的它部。那基本的现象就是二邻点之热的交易；它完全局限于一小部分，且比较上是简单的，只要人们承认（而这似乎很自然的），那交易现象不受距离较大的分子的温度影响。

现在我屈折一根鞭子，它即刻变为极复杂的形状，而是我们不可能直接研究的；然我仍可去试一拭，只须注意它的曲折只是鞭内很小元素变形的总和，并且每元素的变形只依存于那些直接加上去的力，而绝非加在其他元素上的力。

在这些我可以不费力再添上许多的例子中，我们承认没有超距作用，或至少没有相距甚远而发生的作用。这却是一种假设；它不是常真的，地心吸力定律可作证明；所以应当把它来核验；如果它是证实了，即便是近似的，它也是可宝贵的，因为这足以使我们至少用渐进近似法研究数学的物理。

如果这个假设经不起试验，那就要另找其他类似的东西，因为此外尚可

用他法以达到基本现象。倘若有许多的物体同时作用，有时它们的作用也许是独立的而是简单地相互叠加的，至于叠加的方式是或如矢量的，或如标量的。所以基本现象乃是孤立的物体的作用。又或者是我们对于微小运动，更普通点，对于微小变动打交道，这些微小变动是服从那著名的叠加律的。于是观察得来的现象，将可分为简单的运动，例如音之分为谐音，光之分为单色光。

当人们已经识别要从那方面寻找基本现象，试问用何方法才可达到目的呢？

第一，为了猜想它，或说，为了猜度有益于我们的，那就常常不一定深入它的机构里面；我们只要晓得由大数得来的定律就够了。我们试再以热之传播为例；每分子向邻近的分子传热；至于按照什么定律，这是我们不必要知道的；假使我们在这一点上有所假设，则将是一种无关的假设，所以这既是无用的，并且不可核验的。其实有了平均的作用以及根据媒质的对称性，一切的差别都拉平了，且无论做了那种假设，结果总是一样的。

在弹性理论中与毛细管现象理论中有同样的情况发生；邻近的分子互相吸引，或互相推拒；我们不必知道这按的是什么定律；只要这吸力只能在小距离以内才有感觉，只要分子是极多的，只要媒质是对称的。而我们只要让大数定律去支配一切就好了。

这里还是基本现象的简明性隐藏在可观察的总现象的复杂里面；不过这个简明性也只是表面的，内里尚有很复杂的机构。

求得基本现象的最好方法当然是实验了。这应当用实验上的巧法以解散那自然界给我们研究的一束复杂而仔细研究提炼得尽量清楚的元素；例如人们用三棱镜分光为七色，用偏振器分光为偏振光。

所不幸者，这不是常常可能的，也不是常常足够的，而有时我们的理智要超前实验才行。我只要举一个那常使我很惊异的例子：

我如分解白光，我可孤立一小部分的光谱，但无论如何小，它总保有一定的宽度。同样，所谓单色光的自然光呈现一条很细的谱线，但并非无穷的细。我们可假定用实验来研究这些自然光的特性时，用逐渐变细的谱线来试验，最后来到可说是极限时，我们便可认识一种严格的单色光之特性。

这是不确实的。我假定有从同一光源射出的二光线，人们使它们先在二垂直之偏振器穿过，使成为在两垂直平面中之偏振光，再把它们回到同一偏振平面中，然后使它们起干涉作用。如果光线是严格单色的，则它们就会干涉了；但我们的光既是差不多的单色光，就没有干涉作用，而这是不问谱线之如何细的；假使不是这样，那就应该叫这谱线细到比较已知的最细谱线还要缩窄几百万倍才行。

所以在这里，我们被达到极限这一过程所骗了；这是要理智超前实验才行。而它这样做之能成功是由于它被简明性木能指导之故。

知道了基本的事实，我们就能把问题写为方程式；于是经了些组合，就

可推出那些可观察的与可核验的繁复事实。此即所谓积分法；而这是数学家的本事了。

人们可问何以在物理科学中，推广法很自然地成为数学的形式。这个理由现在是很易明白的了：这不特是要表达数的定律：还因可观察的现象是由许多相似的基本现象堆积而成；这样，微分方程式就很自然的导入了。

仅仅每一基本现象服从简明的定律是不够的，还要那些正待组合的现象服从同一的定律。唯独这样。那数学的参加才有益处；

事实上，数学教我们把相似的东西与相似的东西组合起来。它的目的是在猜想一组合之结果，而不必再一块块地重新组合起来。如果人们要把同一的演算，要重演至数次，数学则让我们用一种归纳法，使我们预先知道结果，就可以免去了这种的重复。这是在前面数学推理一章中我已说明的了。

然而为此，一切的演算当互相类似；否则自然要忍耐着实际的依次做下去，而数学将成为无用的了。

所以这全靠物理学家所研究的物质之近似的均匀性，那数学的物理学才能产生。

在博物学中，就再没有这些条件：均匀性，远离部分之相对独立性，基本事实之简明性，而为了这个原因，那博物学家就不得不求助于别的推广方式。

## 第十章近代物理学之理论

物理学理论之意义——普通人很奇怪那些科学理论的不能持久。他们看见那些理论经过了几年的丰收就被人先后的抛弃；他们只见到残毁层层堆叠；他们预见到现在风行一时的理论，霎时间就要变成明日黄花，因此结论它们是绝对无效的。这就是他们所谓科学之破产。

他们这种怀疑是肤浅的；他们全不懂得科学的理论之作用及目的，不然他们可以明白就是那些残毁也还是有用处的。

弗勒钠尔曾认为光即以太之运动，这个理论似乎是再坚固也没有的了。然而现在人们却丢了它而喜用麦克思韦的理论了。然则弗氏的工作可说是徒然的吗？不，因弗氏之目的不是要知道真正有无以太，以及它是否为原子所成，这些原子是否往某某方向运行；而为的是预测光学现象。

而这却是弗氏理论在麦氏以前或在今天永远可以做到的。其中微分方程式总是对的；我们总可用同样的方法计算其积分的，而所得之结果，总保存它们整个的价值的。

但是让人们不要说我们这样是把物理学理论变成一种实用的简单方术；这些方程式表示一些关系，而这些方程式之所以仍旧是对的，因为这些关系能保存其实在性。或前或后，它们能告诉我们某些物与另些物之间有何种关系；不过，这某些物我们从前叫它运动，现在却叫它电流了。然而这些名称

不过是代替真物的影像，至于真物是永被自然遮着。在这些实在物之间的真正的关系是我们能达到的唯一实在，而唯一的条件，就是在我们不得不用来代替它 们的那些影像之间，一如在这些真物之间，当有同样的关系。倘若知道了这些关系之后，那么我们如认为便利时，又何妨把此一影像代以另一影像。

假使把一周期现象（例如电振动）看成的确是由于某原子的颤动，原子有如一钟摆真是摆来摆去，那么这事既是不可靠的，又是没有趣味的。但是假使说在电振动与钟摆运动以及其他一切周期现象之间有一种相应于一种深刻实在的密切关系；而这种关系，这种相似性，或可说这种平行性连在细节之处都有；或者说它也许是较普遍的原理的后果，即能量原理与极小作用原理的后果；这却是我们可以肯定的；这都是永久存在的同一个真理，那怕我们认为有必要把它奇形怪状地改装。

关于色散问题，人们已提出过许多的理论；起先的是不完善的，而且只含有一小部分的真理。后来就有亥尔莫慈的理论；其后人们又把它用各种不同的方法来加以修改，连亥氏自己也曾根据麦氏的原理，创立一说。然而可奇的事，就是这些在亥氏以后的学者，谷由表面上大为分歧的起点，都获到同样的方程式。我敢说这些理论一齐都是真实的，这不仅因为它们能使我们预测到同样的现象，并且因为它们都能显示一种真实的关系，即吸收作用与反常色散现象的真实关系。在这些理论的前提中，真实的事物是所有作者所共有的；这就是关于某物与某物间的关系之肯定，至于物的名称则随作者而异。

气体运动理论已惹起了不少的反驳，人们若在那里面自命看到绝对真理，那就难于答复了。但这些反驳仍不妨碍那理论曾经是有益的，尤其是曾经使我们发觉了一种真的关系，即气体压力与渗透力的关系，倘若没有这理论，我们便不会知道了。在这个意义上，人们可说它是真实的。

当一位物理家发觉两个相反而同样可贵的理论时，他有时会说：我们不必顾虑那个，虽然我们看不见这条链子的中间圈环，我们且紧握住其两端。这位窘着的神学家的论据将很可笑，如果按照普通人的见解来说明物理的理论。当遇到矛盾的时候，则至少其中必有一理论是应该看作是错误的。倘若人们只为了寻求应该寻求的东西，那就不然了。也许每个理论所表达的都是真实的关系，而其矛盾之处只在于我们用以穿着实在的影像。

对于觉得我们太限制学者研究范围的人，我将答道：我们所禁止你们讨论而你们有遗憾的这些问题不但是不可解决的，且是幻想而毫无意义的。

有的哲学家以为全部物理学都可用原子的相互碰撞的道理来说明。倘若他只要说在物理诸现象中，和在大数弹子的相撞中，有同样的关系，那再好没有了，这是可以核验的，这也许是真实的。但他还要说另有一点意义；我们相信是懂得他的，因为他们相信是知道何为碰撞的本身；何则？简单地为的是我们常常看过比赛弹子游戏。我们能否相信上帝看他的造化时，和我们

看比赛弹子有同一的感想呢？倘若我们不愿意对他的断语加以这种奇怪的意义，倘若我们又不愿意我刚才所说明的且是好的那种狭义，那末这个断需便毫无意义了。

可见这一类的假设只有比喻的意义。学者对自己不当禁用它，正如诗人自己不禁比喻；但要知道它们的价值。为了满足理智，它们可能是有用的，而只要它们只是无关的假设，那就无害了。

这一番的讨论，可以解答何以已被人们认为抛弃了的且为实验最后推翻了的某些理论竟骤然能死灰复燃重得新生。这是因为它们曾表达过真实的关系；且当为了这个理由或那个理由我们曾经相信应该用别的言语表达同一的关系立时，那些理论一直是这样做过的。这样它们曾经保持了一种潜伏的生命。

在不满 15 年前,那里还有比库伦所想出的液体再朴素而可笑的东西呢？但今天它又以电子的名义出现了。然则这些永久荷电的分子与库伦的荷电分子，又有何区别？当然在那些电子中那电荷依赖一点物质作支撑，但这却是很微少的；换言之，它们有一质量（至今还有人反驳这话）；然而库伦不是不给他的液体以质量；或者假使他不给与的话，这还是他引为遣憾的。至于说那电子之信仰不会再受腐蚀，这却是胆大的肯定；我们发觉这种意外的复兴，也是奇怪的事。

然而最可注意的例子，就是高罗原理。高氏以错误的假设为起点建立了这原理；当我们知道热不是不可毁灭的，而是能转变成工作的，就完全抛弃了他的观念；其后，克鲁秀士从事于此，才得最后之胜利。高氏原理在它的原始的形式下所表达的除了真实的关系之外，还有不正确的关系，而这是旧思想之残余；但是这些后者的参加并不改变另一些的真实。克氏只要撇开了它们，有如修剪枯枝一般。

其结果便是热力学的第二基本定律。这总是那些相同的关系；虽然这些关系至少在表面上，不再是在相同的事物间存在了。这对于保存那原理的价值已经够了。并且连高氏推理并不因此而消灭；这些推理又曾经适合于染有错误的问题；但是它们的形式（即其主要者）仍是正确的。

我刚才所说的，可以同时显明普遍原理的作用，例如极小作用原理或能量守恒原理的作用。

这些原理有一极高的价值；这是人们在许多物理定律的陈述中寻求共同点时才得到的；所以它们代表着无数的观察的精髓。

但是，由它们的普遍性产生一个后果，这是我在第八章已提起了注意的，这就是它们不再能不被核验了。我们既不能给与能量以一个普遍的定义，能的守恒原理的意义只是说其中有些东西是不变的常数而已。所以无论将来实验给我们什么世界的新概念，我们事先就确信其中必定有些东西是常定的，而我们名之曰能。

这样是不是说那原理毫无意义而化为一种重复语了呢？绝对不是的，它

的意义是说凡我们所称为能的那些东西，都互相有一种真正亲属的联络；它肯定在它们之间有一实在的关系。但是如果这个原理有一个意义，这也许是错的；也许我们无权去无穷地推广它的应用，但就字的严格意思讲来事先就保证它是可核验的；然则我们怎能知道它在何时达到人们所能合法地给与它的一切推广呢？这简单地就是要等它对我们不再有用之时才行，有用就是说不遗误我们而能使我们预测新的现象。在这种情形之下我们将可确信那肯定的关系不再是实在的了；否则，它将是很丰富的；实验不必直接与原理的一种新推广有所矛盾，但也会把它推翻的。

物理学与力学——大半理论家对于借用力学或动力学的解释常有一种偏爱。有些人只要能够把一切现象用按某定律相互吸引的分子运动来说明，就心满意足。有些人就要求更大，他们想取消那种超距的吸引力；于是他们的分子的路径是直线的，非得受了冲击不会曲折。还有别的人，例如赫慈，他们取消那些力，但假定分子间有一种几何的联系，有如我们的关节系统；这样他们想把动力学变成一种运动学。

一句话，大家想把那自然界折成某种形式，除了这种形式以外。他们的理智是不会满意的。那自然界对这事是否够柔软呢？

我们在第十二章中淡麦克斯韦理论时，将再讨论这个问题。凡是能量守恒原理与极小作用原理满足的时候，我们就可见其中不但总有一个力学的解释的可能，并且可能有无穷的可能。利赖了戈立克思先生一条很著名的关于关节系统的定理，我们可以证明能以无穷的方式，用赫慈式的联系或用向心力来解释一切。人们当然也容易证明用简单的碰撞总可解释一切。

为此，自然应该不以通常的物质为自满，不以我们感官所接触到的而其动作为我们所直接观察的那种物质为自满。或者人们可假定这个通常的物质是许多原子构成，而这些原子的内部动作不能让我们知道，仅整体的移动为我们感官所能知道的。或者人们可幻想一些微妙的流体，叫它们以太也好，或别的名称也好，它们在物理学的理论中，历来曾占一极重要的位置。

往往人们更进一步，把以太看成唯一的原始物质，甚至唯一的真正物质。最持平的人把普通物质认为凝结的以太，这是毫无可怪的；然而还有人更减轻它的作用，而只看做以太的奇点的几何轨迹。例如凯尔文以为我们所认为物质的不过是以太受有旋涡运动的地点而已；在黎曼看起来，这是以太常被消灭的地点；在比较最近的理论家，如魏舍或劳莫看起来，这是以太受了一种非常特别的扭转的地点。假使我们站在上面诸家的立场之一上面，我就要问人们有何权柄把在不过是假物质的通常物质上所观察到的力学特性推广到以太上，而藉口以太是真正物质。

当我们已知道热不是不可破坏的时候，就把古代的流体，热素，电等说一概抛去。然而这事还有别的理由。当我们把这些东西认为物质化时可以说就是着重了它们的个性，我们不啻在它们之间挖了一条深渊。等到人们对于自然界的统一性有了较深切的感觉，又看明所有联络各部分的密切关系，这

个深渊就要填塞了。当古代的物理学家增加了许多种的流体，不但创造一些不必要的东西，并且把真正的联系也割断了。

凡一理论仅仅不肯定错误的关系是不够的，还要不遮蔽看真正的关系才行。

至于我们的以太，实在有没有呢？

人们知道以太的信仰从何而来。从远星射来的光线需历程数年才到达我们眼上，而当它既已不在那颗星上，又尚未来到地球的时候总得有一个寄托的地方，可以说总有一个物质的支撑东西。

我们可把同样的观念更数学化地且更抽象地表达。我们所观察得的，是物质的分子所受到的变化；例如我们看见那照片上所受到现象的后果，实即来于数年前那星球的焰烧。但是在普通的力学中，某系统之情态仅依存子其最近的先前情态；所以这系统满足微分方程式。反之，倘若我们不相信以太，刚物质的宇宙状态不但依存于最近的先前状态，且亦依存于既往已久的状态；于是这系统将满足有限差的微分方程式。这是为要避免与力学的普遍定律相抵触之故，我们才发明了以太。

而这不过是迫使我们用以太来填满星球间的真空，但不是把以太渗入物质本身的中间去。费左的实验更进一步。用穿过流水或空气的光线的干涉。费左的实验似乎指示我们有互相渗透但相互移动的二种不同的媒质。人们竟如亲历其境地相信以太。

然而我们还可以想出一些使我们对于以太的感觉更为密切的试验。假定牛顿原理，即主动作用与反动作用相等性，如应用在单独的物质上就不确实，并且假定这是刚才我们所发觉的。于是加在一切物质分子上的力的几何的总和就非零了。如果我们不愿改变全部力学，那就应该把以太加入，使得那物质似乎受到的作用被那物质对于某物所发的反作用所抵消。

又或我假定人们认识光与电的现象都受地球运动的影响。人们就要来结论这些现象不但可以告诉我们物质体的相对运动，并且可以使我们知道那些似乎真实的绝对运动。这还是应该有以太，使得这些自命的绝对运动不是对着虚空的空固移动，而是对着具体的一种东西的移动。

这是人们永不会来到的吗？我没有这个希望，稍迟我将说出理由来，但这种希望不是太荒谬的，因为别人曾经有过。

例如，罗伦慈的理论（这是我在第十三章中要仔细说的），倘是真实的，则牛顿定律将不适用于单独的物质，而其差别不难由实验看出来。

另方面，人们对于地球运动的影响曾经做过很多的探讨，结果总是否定的；然而我们所以从事这些实验，正因我们事前对它就无把握，并且即照一些盛行的理论补偿也许不过是近似的，而人们也许要等待精密的方法来给与肯定的结果。

我相信这样一个希望是虚幻的；而指出这种的成功将不啻启示另一个新世界倒是令人稀奇的事。

现在让我插几句别的话；事实上，我当说明，虽然有罗伦慈的学说，何以我不相信更精密的观察永不会显明除了物质体间相对位移以外的东西。人们曾做过许多的实验，以为它可以揭发第一级的数项；然而结果是否定的。这能是偶然的事么？这是没有人承认过的；人们曾经寻找普遍的解释，而罗伦慈找到了；他指明了第一级的数项自当消去的，而第二级的数项则不然。于是人们作了更精密的实验，结果也是否定的。这也不是偶然的事，这是要解释的；这人们也找到了，人们总是可以找到的；假设，这是最不缺少的基金。

然而这还不够；谁不觉得这还是把偶然的地位抬得太高了？设有某种情况恰巧消去这些第一级数项，又有某种大为不同，但也投机的别种情况，能消去第二极数项，那么这种造成这些情况的奇异的协作不也是偶然之事吗？不然：我们对于这两种，应当找出同一的解释，于是自然使我们联想到这个解释也必适合于更高级的数项，而这些数项的相互补偿将是严密而绝对的了。

科学的近状——在物理学发展史中，人们可以分出两种相反的趋势。一方面，在有些似乎应当永远分开的对象之间，可以随时发现新的关系；散乱的事实就不再各不相干了；它们有整理成为一种强大的综合的倾向。科学走向统一和简明的道路。

另方面，观察使我们天天知道许多新的现象；不过它们要长久等待着才能在科学中占个位置，而有时为要给它们一个位置，人们势必把整个建筑拆去一角。在那些已知道的现象本身中我俩粗陋的感官原来使我们看到的是均匀，而往后我们就天天察见其中更多变化的细节；我们初以为简单的又变为复杂了，而科学似乎走向变化与复杂的道路。

这两种相反的趋势，有时此胜，有时彼胜，究竟结果是谁胜呢？倘若这是第一种胜了，则科学是可能的；然而这不能先验地证实，并且人们可以考虑到虽然经过了徒然的费力想把那自然界勉强归人我们的统一的理想，但因我们的新发现日积月累，我们恐终于不胜其繁放弃了分类，抛弃了我们的理想，而把科学变为无数方术的记录。

对于这问题，我们不能回答。我们所能做的，乃是观察今日的科学，而用它来比较昨日的科学。从这种考察，我们当然能够引出一些推测。

半世纪前，人们曾经抱有极大的希望。自从能量守恒原理及其各种变化发现后，我们才知道力之统一性。这样热之现象可用分子运动解释。至于这些运动的性质，那时人们尚未十分确知；然而人们曾相信不久就可以知道了。关于光的问题，工作可说已完成了。至于电学则进步尚少。电学正与磁学联合起来。这是走向统一之路的一大步，这是最后的一步。然而电学本身怎样也将进入于普通的统一，它将怎样并入万有的机构里，人们却还一点未想到过。但这种并缩之可能性，是谁也未怀疑过的，人们确曾有此信仰。最后，关于物质体的分子特性，则并缩更似容易；但一切细节那时还在模糊中。一

句话，过去希望是广大的，热烈的，但它却是空洞的。

时至今日我们看见什么？

首先是第一个进步，长足的进步。光与电之关系现在是知道了；从前分开的光，电，磁，三个范围现在合成一个了；而这种联合似乎已成定局。

然而得到这种的胜利，我们也着实有所牺牲。光学现象归入电学现象而成为一种特例；只要它们在孤立的时候，这是容易用人们自信为知道细节的运动来解释的，而这是极顺利的；但是现在一种解释如要可行，应当推之于全部的电学而适合。但这却不是容易做的。

我们所最满意的，就是我们要在最后一章说到的罗伦慈理论，它用小的荷电体之运动说明电流；这当然是一种将已知的事实说得最透彻的理论，是一种把最多数的真实关系严明出来的理论，是一种人们在最后的建筑中所能找到得最多遗迹的理论。然而它还有我上面已指明的大缺点；它反对牛顿定律，即主作用与反作用之相等性定律；或者在罗伦慈的看法，这原理是不能应用到单独的物质上的；要它成为真实的，那就应该计及那以太对于物质的作用，以及物质对于以太的反作用。但除非有新局面，好像事情的经过不是这样的。

虽然，因靠着罗伦慈，那费左关于运动物体的光学研究的结果，正常色散与反常色散以及吸光诸定律，才互有联系，并与以太的其他特性联系，而这联系再也不会断的了。试看齐门的新现象一来就很容易得到一个地位，并且它竟能帮助法拉第磁转现象之分类，这是麦克斯韦费了许多工夫所没有成功的；这样的容易，足以证明罗伦慈的理论并非一种预定消减的人为结合物。大约我们应当修改它，但不应消减它。

然而罗伦慈的奢望，只是把运动物体的光学和电动力学结合起来；他并不想给它一种力学的解释。劳莫更进一步，他保守罗氏理论的精髓，而于其中加入麦克古拉对于以太运动的方向的观念，这可说有如接树一般。他以为以太的速度与磁力有同一的方向和同一的数量。所以这个速度是我们所知道的，因为磁力是可以实验的。这种尝试无论如何巧妙，罗氏的理论之缺点还是存在，并且加深了。主作用不等于反作用。依照罗氏，我们不知何为以太的运动：但由于这种无知，我们可以假定它在抵消了物质的运动中又恢复主作用与反作用的相等性。依照劳莫，我们知道以太的运动，而我们可以发觉这种抵消是没有的。

如果照我的意思劳莫是失败了，这圣否说力学的解释就不可能呢？大为不然。我在上面已说过，凡现象一服从能量与极小作用雨原理，就有无穷的力学解释；所以光与电的现象也是如此。

然而这还不够，要使一个力学的解释是好的，那它就要简明；而且为在一切可能的解释中选择，我们除为了选择的必要性之外，还要有别的原因。然而合乎这种条件因而有点用处的理论，我们却还没有咧。我们应不应该埋怨呢？果真这样，那就不啻忘记了我们追求的目的物了，我们的目的不是其

中的机构，而真实和唯一的目的就是统一。

所以我们应节制我们的奢望；不必去想什么力学的解释；我们限于指出假使我们愿意的话，我们总可找到一种解释吧。对于这点我们已有成就；能量守恒原理，至今总是证实的；此外还加上第二原理，即极小作用原理，这原理已有合乎物理学的形式。它也是常常证实了的，这至少是关于那服从拉格朗日方程式即服从力学中最普遍的定律的可逆现象。

至于不可逆现象，就更不顺手了。然而它们还是有秩序而渐趋于统一的；这全靠高楼原理来照明它们。热力学从事于物体之膨眼及其变态的研究已很久了。近来它变成胆大起来而扩张其范围。凡电池理论，热电现象之理论，都当归功于它；它在物理学中无处不有所开拓，且它对于比学也有所钻研。处处流行同一的定律；处处在不同的表面下，我们找到高楼原理；处处也碰到这个熵之不可思议的抽象概念，这个概念与能的概念有同等的普遍性，而且也似乎同它一样遮盖着一种实在。辐射热现象从前似乎不能用热力学来说明；然而新近我们已见到它归于同一的定律下了。

从此我们又发觉了许多新的相似点，以至于细节地方也有相似；欧姆的电阻有似液体的粘滞性；磁化滞后现象倒像固体的摩擦。在任何情形中，摩擦似乎是各种不同的不可逆现象之模型，而这种亲属关系是实在而深远的。

人们也会找过这些现象的一种纯粹力学的解释。这是不容易找的。要找到它们就得假定那种不可逆现象不过是表面的，而基本现象是可逆的，并且服从动力学已知的定律。然而基本的东西甚多，且渐相混合，所以在我们粗陋的眼光看来，似乎都是倾向均匀的，就是说都向同一的方向前进，没有回头的希望。因此表面的不可逆现象只不过是大数定律的效果。唯有一种感官是无穷的灵敏的生物，有如麦克斯韦理想的魔鬼，可能解开这束乱丝，而引世界后退。

为了这个有关于气体运动之理论的概念却费了极大的力，而总还是不大丰富的；但它将来可以成为丰富的。这里不是要审查它会不会引起矛盾来，和是否合乎事物的真正性质。

虽然，我们且把顾衣先生对于布朗运动的新奇的观念说一说。照这个学者的说法，这个奇异的运动不合乎高楼原理。那些他使它震动的分子就比那很紧密的乱丝网孔还细小；所以它们有可能去分解这乱丝，而因此能使世界逆行。我们将以为这是麦克斯韦的魔鬼在作怪呢。

综而言之，旧时已知的现象分类得逐渐好了；但新的现象也来要它们的位置；其中大半，有如齐门现象，一来就得到了。

然而我们还有阴极射线，x 射线，铀和镭的射线。这里别有一世界，是谁也没有想到过的。因此正不知还要安插多少不速之客哩！

现在谁也不能预料它们将有何等的位置。但是我不相信它们要消减这普遍的统一，我还是相信它们将有补足这统一。事实上，一方面新的射线似与发光现象相关连；它们不特可以激发荧光现象，并且有时它们发生的情形与

它相同。

它们与那受紫外光激起火花的原因也不是没有亲属关系的。

最后，而最重要的，人们相信在这些现象中找到一种活动的真正电离子，其速度之强大比在电解液中的实在有天壤之别。

这些都是很空泛的，但将来都会明确的。

磷光现象，光对于电花的作用，这些都曾经是较为偏僻的领域，因此会被学者所偏弃。现在人们可希望去造一条新路线，使它们与普遍科学的交通更加便利。

不但我们将发现新的现象，且在我们曾信为知道的现象中，又严露意外的景象。在自由的以太中，一切定律都保存它们庄严的简明性；但真正的物质似乎渐形复杂；凡是人们对它所说的，永远不过是近似的，而时时刻刻我们的公式需要新的数项。

虽然，那些框子并未折断；在我们曾信为简明的对象中所存在的那些为我们已经认识的关系，当我们知道它们的复杂性时，还是在这些同一的对象中存在看，而要聚的只是这事。我们的方程式愈形繁复，使得与自然界的繁复愈加接近，这是实在的；但关于相互推导这些方程式的关系式却丝毫没有变易。一句话，就是这些方程式的形式还是支持着。

我们就以弗勒纳尔关于反射定律作例罢，弗氏曾用一个简明而引人的理论来建立的，且似乎得着实验上证实的。此后，更精确的研究已经肯定这种的证实不过是近似的而已；它们处处表示有椭圆偏振现象。然而利赖了第一次近似理论，人们会马上找到这种反常现象的原因，这就是其中有一通过层；而弗氏理论的精髓照常存在。

不过人们不得不有一种迥想：就是如果人们起初就怀疑这些关系所联系的对象的复杂性，则一切这些的关系将依然不会被发现的了。久已有人说：如果狄哥有十倍精确的天文仪器，则永不会有凯普勒，牛顿和天文学。一种科学产生得太迟，而观察的方法已太完善，就是一件不幸之事。今日的物理化学就是如此；它的创立者在他们的展望中往往被阻于第三位和第四位小数；所幸的，这些人都有一种坚强的信仰。

当人们对于物质的特性逐渐弄明白时，就看见其中有一种连续性。自从安得来斯与王德耳瓦耳斯的研究结果发表之后，人们才明白了液体变成气体的经过情况，并且知道这种过程不是骤然的。同样在液体与固体雨种状态之间，也没有什么深渊，又在新近的一个会议中我们同时见到了关于液体贴性和关于固体流动的论文。

在这种趋势之下，简明性的丧失是无疑的；某种现象从前是用许多直线表示的：要用或多或少复杂的曲线把这些直线连合起来。在另一方面，这里面统一性却比较好了。这些范畴分清之后，使人们的精神能得安息，但它们还是不足以使人满足。

最后，物理的方法已经扩张到一个薪的领域内，此即化学；物理化学因

此产生。这门学问现在还在幼稚时代，然而它已能使我们把许多现象联系起来，例如：电解、渗透作用以及电离子运动。

从这样短促的叙述中，我们得到什么结论呢？

统而言之，我们已是近于统一了，人们所取的步骤，并未如五十年前所希望的那般迅速，我们没有取预定的路径；然而，最后人们却开拓了许多地域。

## 第十一章　概率计算

在这个地方，忽然来说概率计算，我想人们一定是诧异的。它与物理科学的方法又有何关呢？

但是我所要举出而不去解决的问题，自然是对研究物理的哲学家所要提出讨论的。

为了这个观点，所以在前二章中，我常常用过概率和偶然这些字眼。我上面曾经说过：“一切预见的事实只是大概的。一种预见无论如何稳固，我们决不能绝对确信它不致被实验所推翻。然而这概率往往是很大的，以致我们在实用上能够满意。”

其后我又说过：

“我们且看那简明之信仰，在我们的推广理论中，有何作用。在许多特例中，我们会将简明的定律核验，而我们对于这样一再重见的巧合，决不承认是一种偶然的事。”

所以在许多情况中，物理家的地位有如赌博者，只盼望幸运。凡是他们用归纳法推理的时候，他们多少有意识地用概率率计算。

因此我不得不插入一句话，而打断我们的物理科学方法之讨论，来详细考察这种计算的价值和它值得信任的程度。

单看概率计算这个名词已属谬语，大概是确实的反面，是人们所不知道的，既是不知道的，又如何去计算呢？但是许多高明的学者却已经从事过这种计算，而我们决不能否认科学已从此中获得若干益处的。这表面上的矛盾，怎样解释呢？

概率这个名词已有人下过定义否？到底它可不可定义呢？假使不能的话，那么我们怎敢去用它推理呢？人们将说，这个定义是很简单的：一件事情的概率即对此事顺利发生情形的数目与其可能发生情形的总数之比率。

试举一简例，便可见这定义之不完全了。我试掷二骰；为要二枚中至少有一个显出六点的概率是若干？每骰可显出六种不同的点：可能情形之数为$6\times6=36$，顺利情形之数为$11$；概率为$\frac{11}{36}$。

这个答案是不错的。然而我岂不可说：两骰所显出的点子可成$\frac{6\times7}{2}=21$不同的组合？在这些组合中，$6$个是顺利的，概率为$\frac{6}{21}$。

何以计算可能情形的第一式要比第二式合法呢？无论如何，这不是我们的定义可舍许我们的。

所以我们只好补充这定义，在“……与其可能发生情形的总数之比率”一句下增加一句：“只要这些情形是同样大概的”。这样我们变成用大概来规定大概了。

我们怎样知道两件可能的情状是同样的大概呢？这难道是根据一种公约吗？我们如果在每一问题之起首用一种表明的公约，那就一切顺利，我们只要应用算术与代数的规则就可以一直算到底，所得的结果，不致有怀疑的余地；但是一到我们要稍稍应用它的时候，则我们必须证明这个公约是合法的，于是我们又将遇到我们以为已经巧避的困难了。

会有人说，用我们的常识就可以知道须做何种公约么？唉！白潭先生曾经为了好玩而演算一简明的题目：“如要在一圆周中作一弦比内接正三角形之边为长，则其概率为何？”这位著名几何学家曾依次用两个都合乎常识的公约，于是得了雨个不同的结果，一为$\frac{1}{2}$，一为$\frac{1}{3}$。

由此以艰，则概率计算简直是一种空虚的科学，我们再也不可相信这种不清不楚的本能，所谓常识，而我们从前还要借以纠正我们的公约哩。

然而对于这种结论，我们也不能赞同。这种不清不楚的本能是我们所不可少的；没有它则科学将为不可能，没有它我们将既不能发现定律，又不能应用定律。譬如，我们可以陈述牛顿定律吗？这是无疑的，因为有许多的观察都能与它符合；但这里不是偶然性的简单效果么？况且我们虽然知道这定律许多世纪以来已真了，又怎么知道它明年还是真的呢？对于这个疑问你一点也不会回答，除非说：“这个概率是很小的”。

但我们姑且承认这定律吧；靠着它，我想能够计算一年后木星之所在。然而我有这权吗？谁敢说一个带着极大速度的极大的物质就不会走近太阳系范围而发生一种不可预见的扰乱呢？讲到此地，又是无可回答了，除非说：“这个概率是很小的”。

照这一看，所有科学不过是一种无意识的概率计算之应用；所以破坏这种针算不啻破坏整个科学。

在有些科学问题中，要引用概率计算是比较显然的，对这些问题我不预备多说了。第一譬如在内插法中已知一面数之一些值，人们要去猜夺其中间的值。

我还要举个例：即那著名的观察误差理论，这是我以后还要谈及的，气体运动理论，这个知名的假设是假定某一气体分子可运行极复杂的轨道，但因大数的效果，故唯一可观察的平均现象服从简明的定律，即马略特与盖吕萨克定律。

所有这些理论都是根据大数定律而来，所以概率计算显然会打倒它们的。它们确是只有一种特别的利益，而除了关于内插法外，这都是些牺牲，对于这些牺牲人们是可以忍受的。

但是我上面已经说过，这还不仅是这些部分的牺牲有关，而是关于整个科学的合法性将发生疑问了。

我知道有人一定要说：“我们是无知者，但我们应该行动。为要行动，就无暇去做详密调查的功夫，来解除我们的无知，况且，这样的调查，要花费无穷的时间才行。所以我们在未知前就应该决定，我们要靠运气而行事，而且按照规则，但也不必信之太甚。我所知道的并不是说某事是真的，不过在我认为最好的办法，还是当它是真的做去”。然则概率计算，因而科学只有实用的价值了。

不幸困难不是这样可以打消的。今没有一赌博者要下手，他请我指教。如果我答应了他，则我将根据概率计算，但我不能担保他成功。这就是我所谓主观的概率。关于这一层，人们或可满意我刚才所说的。但我假定有一旁观者专记每局的结果，而且这赌博的时间又很长；则末了看他的记录之时，结果必合乎概率计算，这就是我所谓客观的概率，而正是这个现象有待解释的。

现在有许多保险公司应用概率计算，且他们能分配于股东以红利，这红利的客观实在性，是无可非议的。拿我们的无知与行动的需要性来解释这事，这是不够的。

所以绝对怀疑是不能成立的；我们应当谨慎，但我们不能作笼统的攻击，一定要经一番讨论才行。

一、概率问题之分类——关于概率的问题之分类，我们可有好几种看法，第一根据普遍性。在上面我已说过：概率者，乃顺利情形之数与可能情形之数之比。因为没有较妥的名词，我所命名的普遍，将与可能情形之数并进。此数可以是有限的；例如一局骰子之可能情形的数为三十六。这是第一级的普遍性。

但是，譬如我们问在圆周内之一点能在此圆的内接正方形中的概率如何，则圆中有多少点便有多少可能情形，意即有无穷数。这是第二级的普遍性。普遍性还可加以扩张：我们可以问，如欲某函数满足某一给定条件，则此概率若何；于是我们能想出多少不同的函数就有多少可能的情形。这是第三极的普遍性，譬如，当我们根据有限数的观察而猜想概率最大的定律之时，我们就升上这级了。

我们可站在完全不同的观点。如果我们不是无知，那就没有概率，而只有让位于确定了；但是我们的无知不能是绝对的，否则也将没有概率了，因为就是要达到这种不确定的科学，还得要借点光明才行。所以概率问题可视此种无知程度之深浅而分类。

在数学中，已经可提出概率问题。如在对数表中任意找一对数之第五位小数为 9 时，此概率若何？我们一定不迟疑地答道，这是 $\frac{1}{10}$。此地我们具有此题所应有之数据；我们不用表就可计算对数；但我们不愿费这种力。这就是第一级的无知。

在物理学中，我们的无知是更大了。一系统在某时之情态依存于二事：它的初时情态和这情态变化定律。这两样事情我们如果都知道了，我们胳只剩数学问题待解决，而我们又将落在第一般的不知上面了。

但人们往往知道定律，而不知初时情态。譬如有人问现在小行星之分布如何；我们知道自古以来它们是受凯普勒定律支配的，但我们不知道它们在初时分布如何。

在气体运动中，人们假定气体的分子走直线轨道，并且服从而弹性物体碰撞定律；但因不知道它们的初时速度，故其现在速度亦无从得知。

唯独概率计算可以预测平均现象，而来于这些速度所组成。这是第二级的无知。

最后，不但初时的条件，并且定律本身，都可能不知；于是人们到达第三级的不知，而一般我们对于一现象的概率再也不能有丝毫的肯定了。

往往人们不是根据多少不完全的定律知识以预测一事端，而是先知事端，再猜测其定律；不是由因求果，而是由果求因。这叫作原因之概率问题，这些问题对于科学上之应用要算最有趣的了。

今如我和一位我知道他极诚实的人玩纸牌游戏，他将出牌，当他翻出的牌是王，则此概率如何？这是 $\frac{1}{8}$ ；这是效果概率问题。我和一位不相熟的人作同样的游戏，他翻了 10 次牌，其中 6 次是王；假使我的游戏是骗子，则此概率又将如何？这是原因概率问题。

我们可说这是实验方法的主要问题。我已观察得 x 的 n 个值，和 y 所有相应的各值；我已发觉后者与前者之比显然为常数。这就是一件事端，试问其原因何在？

这大概是不是一种普遍的定律，根据这定律 y 与 x 成正比例，而其中小小的差别是由于观察之错误？这是我们研究科学时不断地提出的一种问题，而是人们在研究科学时不知不觉地解决了。

我现在且把这些不同类的闹题提出讨论，我先讨论主观的概率，有讨论客观的概率，这些都是我上面定过的名词。

二、在数学科学中的概率——自 1883 年以来，圆求方问题之不可能是已经证明的了；但在这很久以前许多几何家以为这个不可能性实在是十分“大概的”，所以科学院不经审查就丢弃那些可惜的疯子每年送去的论文，呵，那些论文真是太多了。

试问学院做错了吗？自然不是，因为它知道这样做并不会埋没一种真正的发现。它当时虽未能自辩；但它深知道它的本能决不会欺骗它的。如果你要问这学院里的院士，他们一定答道：“我们曾比较，是一位无名的学者能解决久想解决而未果的问题之概率为大，还是地球上又多了一个疯子的概率为大；我们觉得这后者的概率似乎较大。”这是很好的理由，但毫无数学的性质，这纯粹是心理的。

又如你再追问他一句，他又将说：“你何以要一超越函数的特殊值为代

数的数；又如π为某代数方程式之根，你何以要它是函数 Sin 2x 的周期而同一方程式的其余的根则又不然呢？”总之，他们想引用一种在最空泛形式下的充足理由律。

然他们从中可得着什么？顶多不过一个利用他们时间的规则，与其把时间用来看那种早为他们所不信任而枉费心血的书，不如把时间用在普通的工作上为有益。但我上面所谓客观的概率与此第一题毫无关系。

至于第二题则不然。

例如我有一本对数表，在起首 10，000 对数中随意取一个要它的第三小数为偶数，则此概率为何？你一定不迟疑地回答这是$\frac{1}{2}$，事实上，你如把表中这些 10，000 个数目的第三位小数一个个写出来，你将一定见到偶数之数与奇数之数差不多相等。

如果人们愿意的话，现在把相应于 10，000 个对数的 10，000 数写下来；如果对数的第三位小数为偶数，则每数为＋1，反之则为－1。然后将这些 10，000 数平均。

我将不迟疑地说：这 10，000 数的平均数大概是零，并且我如果实在去计算它，我将证验这数目一定是很小的。

但这种核验也是无益的。我本可证明这平均数小于 0.003。为建立这个结果，那就要用很长的演算，此地篇幅是太小了，因此我只好引证我在 1899 年 4 月 15 号出版的“普通科学杂志”内所登之一文供读者参考。我所要使人注意的唯一点就是：在这演算中，我只需要二事为根据，即对数的第一次导数与第二次导数在所考虑的间隔内：仍旧是包含在某定限中。

由此得第一后果，即此特性不仅对于对数为真，且对于任何连续函数亦然，因为凡是连续函数的导数都是有限的。

我所以能预先确知结果，第一，是因为我对别的函数已常常观察过相似的事实；其衣，因为我在内心里总做了些多少是无意识的而不完善的推理，这种推理会引我到前面的不等式，有如一位演算的能手，他在未算完乘法以前，早已知道“大约若干”了。

况且，我所谓我的直觉，既然只不过是一种真正推理的不完全的视察，人们便可说明观察何以会证实我的预见，又何以客观的概率与主观的概率会相符合。

今再选下题作为第三例：u 是一任意数，n 是一极大的给定的整数；则 sin nu 的大概值为何？这个题目本身是毫无意思的。如欲给它一个，就要一公约；我们试公认 u 介于 a 与 a＋da 之间的概率是φ（a）da；因此概率与无穷小的间隔 da 之广延成比例,而等于此广延乘那仅依存于 a 的函数φ(a)。至于此函数我可任意择定，但是必需假定它是连续的才行。sin nu 之值在 u 增加 2π时既不变，我就可以不去限制普遍性而假定 u 介于 o 与 2π之间，因此我就要假定φ（a）是周期函数，其周期是 2π。

我们要找的大概值可用单积分容易地表达，且很易证明这积分是小于

$\frac{2\pi Mk}{n^k}$。

$M_k$是φ（u）的第 k 次导数的最大值。所以人们可见，如第 k 衣导数是有限的，则我们的大概值，当n无限地增大时，将渐趋于零，且较$\frac{1}{n^{k-1}}$之趋于零为快。

故 n 极大时，sin nu 的大概值为零；为要规定此值，我曾求助于公约；但无论此公约如何，结果总是一样的。当我假定了函数φ（a）是连续而遇期的，我只受了很小的约束，且这些假设是这样自然，以致我们自周怎能避免它。

把前面各方面都很不同的三个例子审察了之后，我们一方面已经窥见哲学家所谓充足理由律的作用何在，他方面，有些特性是为一切连续函数所公有的，这是件重要的事实。在物理科学中研究概率将引致我们得到同一的结果。

三、在物理学中的概率——现在我们来到关于上面所说的第二级的无知的问题了；这就是那些人们知其定律而不知其系统初时状态的题目。我尽可多举些例子，但我只要举一个：在十二宫上小行星现在大概的分布如何？

我们相信它们是服从凯伯勒定律的；我们不变易此题之性质，甚至可假定它们的轨道都是圆的，都在同一平面，而为我们所知道的。反之，我们完全不如它们初时的分布如河。但是我们可不迟疑地肯定今日这种分布是均匀的。何故？

设 b 为一小行星在初时即在零时之经度，设 a 为其平均运动；则其在现时，即在 t 时之经度当为 at＋b。如说现时之分布为均匀的，这就是说以 at＋b 的倍数为角度的正弦和余弦之平均数为零。我们何以做此肯定？

试以平面上之一点代表每一小行星，即此点之坐标适为 a 与 b。这些表示点将包含于平面上某定范围内，但点数既多，这范围便好像撒满了点子一般。其实我们丝毫不知道它们的分布法。

对于这种问题人们要应用概率计算时，怎样做呢？加要一个或多数表示点是在平面中某定部分，此概率为何？当我们无知的时候，我们只好作一任意的假设。为要使人明白此假设的性质，请让我与其用数学的公式，不如用一粗线而具体的形象来说。我们试想像在此平面上铺有一种幻想的物质，其密度是可变的，但是连续变动的。于是我们约定说，那些在平面上某部分的点子的大概数目与那理想的物质之数量成比例。于是人们如有平面上两相等的部分，则我们的小行星的表示点在此一部分或在彼一部分之概率之比将等于此幻想物质之平均密度在此两相应部分之比。

所以这里有了两种的分布，一种是真的，其中表示点是很多的，很挤的，但有如在原子假设中物质的分子之分布，都是散离的；一种是离开实际的，其中表示点是以幻想的连续物质代替的。我们知道这后者不是实在的，但是我们的无知逼使我们去采用它。

我们如还有点关于表示点的实在的分布的观念，则我们便可安排得，使在某定广延的部分内此幻想的连续物质之密度大约可与表示点之数成比例，这些点可说就是包含在这范围内的原子。其实这也是不可能的，而我们的无知实在太大了，以致我们势必任意拣一函数，以规定我们的幻想物质的密度。我们只受一种不可避免的假设之限制，我们假定这函数是连续的。这样已足使我们得一结论，我们且看罢。

在 t 时，那些小行星之大概的分布如河？或者，在 t 时，径度正弦即 sin（at＋b）之大概值为何？起初我们曾作一任意的公约，但我们如采用它，则此大概值是完全定当了。今将平面划分为元面积。考虑 sin（at＋b）的在每元面积中心之值；将此值乘此元面积和幻想物质的相应的密度；然后再对所有元面积积分。照定义，这总会即所求之大概的乎均值，它是用重积分表示的。

人们或以为这平均数由函数φ而定，这函数规定幻想物质的密度，而φ既是任意的，那么随着我们任意的选择，我们将得任何的平均值。这却是绝对不然的。

用一简明的计算可以证明这重积分，当 t 增加时，却递减得极速。

因此，我不知道究竟对于初时的某种或某种的分布问题应该做什么假设才好；但是无论用何种假设，其结果总是一样的，就是这样我才解决了疑难。

无论函数φ是什么，当 t 增加时，其平均值渐趋于零，且因那些小行星必已完成了极多次数之旋转，所以我能肯定这平均值必定很小。

我可随意选择φ，但是有一种限制：就是这函数应当是连续的；事实上，就主观的概率而论，如选了一种不连续的函数，未免不合理；例如我如假定初时的径度正为 0°，而不能在 0°与 1°之中，其理由何在？

但是如果就客观的概率而论，如果我们从理想的分布（那里理想的物质已假定为连续的）来到真实的分布（那里我们的表示点有如散离的原子），则困难又生。

sin（at＋b）之平均值简直可用下式表之：

$$\frac{1}{n}\Sigma\sin(at+b)$$

其中 n 表示小行星之数。我们所有的已非一连续函数的重积分，而是断续的数项之和数。然而竟无人会真切地疑惑这平均值实在是极小的。

此因我们的表示点既极拥挤，我们这断续的数项之和数与积分相差一般也是很少的。

一积分乃一些数项之和在数项增至无穷时所趋向之限值。如数项极多，则和数与其限值相差极少，即与积分相差极少，而我关于积分所已说的话仍然适合于此和数。

但也有例外，例如如果对于一切小行星：

$$b=\frac{\pi}{2}-at。$$

在$t$时所有一切行星之经度将为$\frac{\pi}{2}$，而平均值当然将等于$1$。为此，则在 0 时，所有小行星都应该放在一种特别形而紧密的螺旋线上。大家将以为这种初时的分布是未必有的（就是假定它实现了，但在现世代，譬如 1900 年一月一日，其散布必不均匀，数年后才可均匀）。

然而我们为什么断定这初时的分布是未必有的呢？这是要解释的，因为我们倘若没有理由舍去这个荒谬的设想，认为不确实，那就一切都会倾倒了，而我们再也不能丝毫肯定现时的某某分布的概率是如何了。

我们要援引的，仍是充足理由律，这是常常要回顾到的。我们可以假设行星初时分散得仿佛成一直线；且亦可以假定行星不是整齐的分布；但是我们觉得好像无充足理由能使那产生它们而未知的原因去依着一条很整齐但很复杂的曲线而动作，并且好像特意选择这曲线而使得现在的分布是不均匀的。

四、红与黑——为那些偶然的游戏所引起的问题，例如转盘赌，其实与我刚才所谈的完全相似。

譬如在圆面上分成极多的相等部分，并涂以红黑相间的二色：用力将指针旋转，在经过很多数的圈子之后，它停在某分格。欲此分格为红，则其概率当然为$\frac{1}{2}$。

今设指针的旋转角度为θ，且包含几个圆周；我如用力旋转此针使它停在θ与θ＋dθ之间，则不知概率为何；但是，我可做一公约；假定此概率为φ（θ）dθ；至于函数φ（θ）我完全可以任意选择；绝对没有什么可以指导我选择；但是我却自然地会假定这函数是连续的。

设ε为每红分格或黑分格之长度（在半径为 1 之圆周上计算）。

应该计算φ（θ）dθ的积分，一方面把它普及于所有的红分格，另方面普及于所有的黑分格，而比较其结果。

我俩试认定一间隔 2ε内含一红分格和它相继的黑分格。设Ｍ与ｍ是φ（θ）在此间隔中的极大与极小值。普及于所有红分格之积分将小于ΣＭε；普及于所有黑分格之积分将大于Σｍε；故其相差将小于Ｍ（M-M） ε。但是，如函数φ是假定连续的；又如ε对于指针所转之全角度为很小，则 M-M 之差数将为很小。故二积分之相差很小，其 概率将近于$\frac{1}{2}$。

人们可明白，我虽不知填函数φ为何，我应该将概率当作$\frac{1}{2}$做去。另方面，人们可以解释何以我从客观的观点上，我观察得若干次局数，这观察的结果是红的次数大约等于黑的次数。

凡赌博家都知道这客观的定律；但这定律却巴他们陷于错误中；这错误虽经屡次提出，然他们仍旧常常坠落其中。如果红色连接出了六次，他们以为放在黑的上，一定靠得着；因为他们说：红色连出七次，这是很少的。

实际上，他们获胜的概率还是$\frac{1}{2}$。在观察上，实在速出七次红色是很少的，但六次红一次黑也是很少的呵。他们已往意了七次红是很罕有的；他们所以不能注意六次红一次黑也是罕有的缘故，这完全是因为这种情形很少引起注意。

五、原因的概率——我现在来谈原因的概率问题，这是在科学应用一方面最重要的问题。例如：有雨颗星在天球上是很接短的；这种表面上的接近是否纯粹偶然的效果，而这雨颗星虽似在同一的视线上，然与地球的距离是否相差甚大，因而彼此相距离甚远呢？或者这是实在的接近吗？这就是原因的概率问题。

我首先要追忆在迄今所谈的效果的概率的诸问题时，在起初我们总要安置一种多少是合理的公约。假使说在某种尺度下，结果总是不依存于这公约，这只因为某种假设的条件使我们先验地舍去好比不连续的函数，或某种荒谬的公约。

我们研究原因的概率时，我们又可见到一些相似的东西。一种效果可由 A 原因或 B 原因所产生。今效果既已发生；人们要问这是由于 A 原因的概率为何；这是后验的原因的概率。但是如果没有多少是合理的公约预先告诉我 A 原因之先验的概率，那我就不能计算它了；我所要说的概率是诣对于尚未观察其效果的人而言的事端的概率。

为更明白起见，我再举前面说过的那种纸牌戏为例；我的对手先动而所翻出的是王；如果这是希腊人，则其概率为何？依普通的公式求得，这是$\frac{8}{9}$，这个结果当然是很可怪的。我假如再加以考察，将可看见，我们做这样的计算，好像在未坐在桌子旁边以前，我已认为在雨分中已有一分认为我的对手是不规矩的。这是荒谬的假设，因为如有这心理我一定不会和他玩了；故此结论之谬误亦即在此。

关于先验的概率之公约已经不合理了 ;因此后验的概率针算把我引到一个不可容许的结果。由此可冕这预定的公约之重要性；我还可补充说，倘若不做一点这种公约，则后验的概率问题将毫无意义；故总要明白的或暗示的去做它才行。

现在再举一个更合乎科学的例子。我想确定一实验的定律；此定律侍我知道之后，就可用曲线来表示；我做了若干次孤立的观察；每一观察可用一点表示。我得了这些不同的点之后，便用曲线穿过它们，使不致与各点相距太远，并须保持此线的整齐形状，没有角点，没有太急的曲折，没有曲率半径太急的变化。此曲线可表出一个大概的定律，我承认它不但能使我知道已经观察过的函数数值的中间数值，而且还能使我知道那些观察得的数值之本身，比直接的观察更为正确（因此我将曲线贴近这些点子而通过，并非经过这些点子的本身）。

这是一个原因概率的问题。那些效果即我所记录下来的量度；它们依存

于两种原因的组合：现象之真正定律与观察之误差。知道了效果，尚须寻求使现象服从某定律之概率，以及使观察沾染某种误差之概率。于是概率最大的定律相应于所画的曲线，而一种观察的概率最大的误差即以此相应点与曲线的距离表出。

但是，在一切观察以前，我如对于某定律之概率以及我万一的误差之概率没有先验的概念，则此题将毫无意义。

如果我的仪器是好的（这是我在未观察以前已经知道的了），我就不会使我的曲线与实验上直接得来的标点相离太远。如果这些仪器不好，我可以稍为离远一些，冀得一屈折较少的曲线；这样，那曲线之整齐形状就多牺牲一些了。

我为什么要想法画一没有屈折的曲线呢？此因我先验的就认定为连续函数所表示的定律（或以高次遵数是很小的函数表示），比之不合此种条件的定律的概率较大。如无此种信仰，我们现在所谈的问题将毫无意义；内插法也将是不可能了；人们决不能从有限的观察中推出一种定律；科学将不能成立了。

五十年前，物理学家认为在同样的情况中，简明的定律总比复杂的定律为可靠。他们甚至引借这个原则来袒护马略特定律，反攻侯洛尔的试验。现在他们排斥了这种的信仰；但是有多少次，他们不是仍旧好像被迫要奉守那信仰做去吗！虽然，这个倾向所余的就是连续性之信仰，而我们刚才已见过，如果轮到这个信仰也有消减的一天，则实验科学将成为不可能了。

六、误差理论——因此我们就被引导来谈关于误差的理论，这理论与原因的概率问题直接相关。这里我们仍是察见一些效果，此即若干不相调和的观察，而我们想法去揣度其原因，这些原因，一方面是被测量的量之真值，另方面是每一孤立的观察中所做的误差。应当计算每一误差之后验的大概数量，以及须要测量的量的大概值。

但是，照我刚才所已经说明的，如果人们不先验地（即在一切观察以前）承认一种误差的概率定律，则这计算是不能做的。误差定律有没有呢？

凡计算家所承认的误差定律就是哥斯定律，它是用一超越曲线表示的，名曰“钟形曲线”。

先且照古典方法区别系统误差和偶然误差。我们如果用太长的米达尺量一长度，我们结果所得的数总是太小，虽经数次测量，然这终是无用的；这就是系统误差。我们加用一精密的尺测量，虽然我们也能量错，但是有时我们错的多，有时错的少，苟经多次测量之后，试求其平均数，则错误渐消。这是偶然误差。

系统误差不能满足哥斯定律是显然的；但是偶然误差能满足它吗？人们早已试做过许多的证明；而大概都是些粗陋的误解。但是人们仍可根据下述的假设以证明哥斯定律：所犯的误差乃是许多部分的与各自独立的误差组合而成；每一部分的误差是很小的，并服从一条任何概率定律，但一个正号的

误差之概率和一个相等而记号相反的误差之概率是同样的。自然这些条件往往可以满足的，但并非永是如此，对于满足这些条件的错误，我们就可名之曰偶然的。

人们可见最小二乘方法不是在一切情况中都是合法的；一般物理学家还比天文家更看轻它。这一定由于天文家除遇有如物理学家的系统错误之外，还要向一种极重要的误差之原因斗争，而这完全是偶然的误差；我要说的是大气的波动。所以听一位物理家和一位天文家讨论某观察方法，那是很奇怪的。物理家因确信一次好的测量胜过许多次不好的，故竭力小心以消除最后的系统误差为前提，而天文家回答道：“但是你这样只能观察极少数的星；偶然误差还是不会消减的”。

我们的结论应该如何？是否应该继续应用最小二乘方法呢？我们应当区别：我们已把所能怀疑的一切系统误差都消去了；我们固然知道还有，不过我们不能发现它们；但是我们应当打定生意，而采用一个确定的数值，认为大概的数值；为此我们最好的做法显然就是应用哥斯方法。我们所应用的只是关于主观的概率的实用规则。这是没有什么可说的。

但是人们还想进一步，并且不特肯定大概数值是若干，并且肯定结果中所犯的大概误差是若干。这是绝对不合法的；要这是真实的除非我们确知那些系统错误都已经消去了，但这是我们所绝对不得而知的。我们有雨系列观察；应用最小二乘方法时，我们觉得第一系列的大概误差比第二系列的小雨倍。但是第二系列可能比第一系列的好，因为第一系列可能沾染着很大的系统误差。我们所能说的，便是第一系列大概胜于第二系列的，因为它的偶然误差较弱，并且我们毫无理由去肯定，系统误差在这一系列中比另一系列为大，关于这层，我们绝对是不知道的。

七、结论——在前文中我提出了许多的问题，可是一个都没有解决。但是我并不懊悔把它们写了出来，因为这也许能引起读者对这些难题有所迴思。

虽然这样，其中有些地方似乎是树立得很好的了。为要作某种概率计算，甚至要使这计算有一个意义，那末就应该以承认一种假设或是常常略含任意性的公约为起点。选择这种公约时，我们只能以充足理由律为向导。

不幸这个原则是很空泛的，并且是很有伸缩性的，而在我们方才很快的考察中，已见过它有各种不同的形式了。最常见的形式，就是连续性之信仰，这信仰很难用不可辩驳的推理去证实，但是如果没有了它，则一切的科学也就不可能了。最后，凡是能应用概率计算而有效果的问题，都是其结果不依存于初时假设的问题，只要这假设满足连续条件。

## 第十二章　光学与电学

弗勒纳尔的理论——人们所能举的最好的例子[①]就是光的理论及其与电学之关系。有赖于弗氏，光学才变成物理学中最进步的一部分；所谓波动说实在是满足人意的整个理论；但我们不可向它要求它所不能给我们的东西。

数学理论不是以揭示我们事物的真正性质为目的；如有这种奢望那就未免不合理了。它唯一的目的，只在整理实验所告诉我们的物理定律；然而如果不靠数学，则我们连这些定律都将说不出来。

以太真正存在与否，这都与我们没有大关系的，这是玄学家的事情；在我们最要紧的，就是我们可以把它当作存在的，而这个假设颇便于解释许多现象。最后，我们还有无别的理由可以相信物质的东西之存在呢？这也不过是一种便当的假设：但这是永远如此便当的，而总有一天以太会成为无用而被抛弃了的。

然而就是有那一天，光学定律及其解释的方程式还会是真实的，至少是第一次近似的。所以研究那联络这些方程式的学说总是有益的。

波动理论就是建立在一种分子的假设上的；有些人相信这样就把藏在定律里的原因揭发了，他们以为这是有益的；有些人以为这正足以引起怀疑；然而我以为这种怀疑与前面一班人的幻觉，都是不大对的。

这些假设的作用是次要的，人们可以牺牲了它们；普通人们总不这样去做，因恐失去陈述上的朋晰性，而这就是唯一的理由。

事实上，人们如仔细去观察，则见人们所借用于分子假设的不过二事：能之守恒原理和方程式的线性形式，这些方程式表示微小运动的普遍定律，有如一切小变动的普遍定律。

这可以说明何以人们采用光的磁电理论时，弗氏的结论大部分仍可以无变动而存在。

麦克斯韦的理论——大家知道本来互不相干的光与电的密切关系一直要等麦克斯韦才把它们联络起来。这样，基础虽是更宽大，进入更高的和谐中，但是弗氏的光学还是生动的。它的各部分还是存在，而其相互的关系还是一样的。不过，我们讲解时的语法已变了，另方面，麦氏更发明了许多前人未曾发现的电与光之各部分的关系。

法国的读者第一次展开麦氏的书时，便觉有所不安，甚至往往赞美的感情与怀疑的感情参半。要费许多的努力与长久的牺牲，这种感情才逐渐消减。有些高明人甚至把它永久保存着。

为何这位英国学者的思想在我国这样难得同意呢？无疑的，这是因为大半有知识的法国人所受的教育使他们爱好精确与逻辑，先于其他一切特性。

在这方面，古傅的数学物理的理论足使我们完全满意。我们所有的老师，自从拉普拉斯直至哥希都是用同一的方法去研究。他们从一种很明晰陈述的

---

[①] 这章是我所著的下列二书中序文的摘录：光之数学理论（Paris，Naud，1889）及电学与光学（Paris，Naud，1901）。

假设出发，而引出一种有如数学严密性的结果，然后，再借实验以为比较。他们好像要把物理的各部分都给以有如天体力学的精密性。

对于性喜这种模范的人，凡是一种理论总难于使他满意。他不特不容许有一点矛盾的地方，还要各部分都合乎逻辑地联络起来，并且要不同的假设愈少愈好。

还不只此，他还有别的要求，这是我以为不大合理的。在我们能够感触到的和实验使我们知道的物质之后，他还想看见一种别的物质，在他以为唯此才是真实的东西，而这种物质所有的只是纯粹几何的特性，其原子只是按照动力学公律而移动的数学点。明知这些原子是无形无色，但因一种不知不觉的自相矛盾，他想把它们表现出来，因此使其更加接近寻常的物质。

这样他才完全满意，并且以为钻进宇宙的秘密了。即使这种满意是骗人的，但他也不容易改变这种想头。

因此，当一个法国人展读麦氏的书时，他期待着可以找到好像建在以太假设上的物理光学那般精密而有逻辑的理论；这样他未免要大失所望，这是我要即刻奉劝读者务必避免的，同时告诉他哪些是应在麦氏书中寻求的，哪些是不应寻求的。

麦氏对于电与磁并没有力学的说明；他仅限于说这个说明是可能的。

他也指明了光学现象不过是磁电的特殊现象。所以人们可从所有电之理论中，直接推出关于光之理论。

不幸这个道理倒过来讲就不对了，从完全的光之理论中，往往不容易引出关于电学现象的完全解释。人们如从弗氏理论起始，这更是特别不容易了。这一定并不是不可能，但人们总要问从前所有认为决无变更而可赞美的结果是否势必一齐抛去。这好像是倒退一步了，因而是许多高明的人不能容忍的。

读者就是无奢望时，他还免不了别的困难，这位英国学者不是要建立一座唯一的、最后的、布置极好的大厦，这不过好像他建了许多暂时的而独立的建筑，在这些建筑中交通甚是困难，有时竟不可能。

我们试举一例，例如有一章论静电引力可用介电媒质中的张力与压力来说明。如把这章删了之后，其余的不显得就不明白和不完全；并且另方面，这章自有它的理论，人们不看它的前后文就可懂的。但是这章不仅是独立的，并且与全部书中的基本意义难于融合。麦氏并不想融合，他只限于说：“我未能再进一步，即我不能用力学来说明介质的应力。”

这个例子足以说明我的意思，其实我可以举许多别的例子。譬如人们读到磁性旋光偏振现象时，谁还疑惑光的现象与磁的现象有相同之处。

所以人们不要以为避免了矛盾，自己总要有一个主张才行。其实，两种矛盾的理论，只要人们不把它混合，并且不要问事物的究竟如何，都可以做研究的有益工具，如果麦氏没有开了那么多的新歧路，则读他的书时所能引起的思路一定较少。

然而这样则基本观念未免稍被遮盖了。这种的情形尤以在通俗的书籍中

为最，这是唯一被放弃的一点。

所以我相信应该解释这基本观念之内容，以更显明其重要性。为此，加一节插话是必要的。

关于物理现象之力学的解释——凡在物理现象中总是有一些参变数是实验可直接达到而可测量的。我名之曰参变数 q。

其次由观察使我们知道这些参变数变化的定律，这些定律普通可用那联络其中参变数 q 与时间之关系的微分方程式表示。

倘若把这种现象给以一种力学的解释，那将怎样做呢？

那么人们将或用普通物质的运动或用一种或数种假想的液体的运动来解释它。

这些液体将认为极多数孤立的分子 m 所组成。

那么我们何时可以说我们有了某现象的完全的力学解释呢？这一方面要待我们知道了这些满足假想分子 m 的坐标的微分方程式，这些方程式且当符合动力学原理；另方面，要待我们知道了那规定分子 m 的坐标为参变数 q 的函数的关系，这些参变数 q 是可由实验求得的。

我已经说过，这些方程式是要符合动力学原理的，特别地要符合能之守恒原理和最小作用原理。

由第一原理可知总能是常数，且可分为二部分：

一、动能或活力，其强弱依存于那些假想分子 m 的质量及其速度，我名之曰 T。

二、势能只依存于这些分子的坐标，我名之曰 U。此 T 与 U 两能之和才是常数。

现在要问极小作用能告诉我们什么？它说那系统如要从它在 $t_0$ 时所占的初时位置，移到它在 $t_1$ 时所占的最后位置，它所走的路径必使在那从 $t_0$ 时到 $t_1$ 时的过程中“作用”之平均值（即 T 与 U 二能相差数）为最小。况且第一原理实即第二原理的后果。

如果人们知道此 T 与 U 二函数，这个原理就足以确定运动方程式。

在所有由此地来到彼地的各种路径中，自然有一条路可使作用的平均值比任何路径的平均值为小。而且只有一条路，因此极小作用原则足以确定所经历的路径以及运动方程式。

这样，人们就求得所谓拉格朗日方程式。

在这些方程式中，独立的变数即是假想的分子 m 的坐标；但现在我假定以直接可由实验求得的参变数 q 为变数。

于是这两部分的能量当表现为参变数 q 的函数及其导数；自然实验家所看见的是这样的形式。他当然想用他能直接观察的数量以定势能和动能[①]。

如是则系统从此情形变到另一情形所走的路径必须使其平均作用为最

[①] 我们补充说 U 只依存于 q，T 依存于 q 及其对于时间的导数，且对于导数为二级齐次多项式。

小。

现在不管 T 与 U 是否用参变数 q 及其导数表示的；不管我们是否利用这些参变数以规定起点与终点的情形；极小作用的原理总是真实的。

所以，在一切由此位置来到另一位置的路径中，此地仍只有一条路能使平均作用为最小。因此极小作用原理足以确定那些规定参变数 q 的变化的微分方程式。

这样求出的方程式是拉格朗日方程式的另一形式。

为要组成这些方程式，我们不必知道这些参变数 q 与假想分子的坐标的关系，这些分子的质量，以及做为这些分子的坐标的函数的 U。我们所要知道的，乃是做为 q 的函数 U 的表式和做为 q 与其导数的函数 T 的表式，就是说做为实验数据的函数的动能与势能的表式。

于是不外乎两件事，或是函数 T 与 U 既已合式的选择了，有如吾人刚才说的那样建立起来的拉氏方程式将与实验求出的微分方程式全同；或是并无函数 T 与 U 可以有这样符合的。在后一种情形时，自然就不可能有一个力学的解释了。

使力学的解释是可能的必需条件，是在能够选定函数 T 与 U，使既满足极小作用原理，又能引出能量守恒原理来。

这个条件也是充足的 ;试设想我们找得了含参变数 q 的函数 U,它表示一部分的能，而以 T 表示其他部分，T 为参变数 q 及其导数的函数；又假定这函数对于这些导数为二齐次多项式；最后，假定以 T 与 U 两函数所组成的拉氏方程式能与实验数据相符合。

要怎样才可以从中引出一种力学的解释呢？这必须 U 可认为一系统的势能，而 T 可认为同一系统的动能。

关于 v 是不难的；但是 T，是否可认为一物质系统的动能呢？

那是很容易证明这总是可能的，甚至有无穷的方法。我只限于请读者参阅我所著的电与光一书的序言以求详细。

这样我们如不能满足极小作用原理，就无力学解释之可能；如能满足这原理，那就不单有一个，且有无穷个的解释，因此，一待有了一个解释，就有其他无穷的解释。

于此还有一个注意。

在由实验直接告诉我们的数量中，有些被我们认为我们假想的分子的坐标的函数；我们的参变数 q 就是这种；我们把别的不但看做依存于坐标且依存于速度，或同样的可说是依存于 q 的导数或为这些参变数及其导数的组合。

于是就生出一同题；在所有实验测得的数量中，我们将选何者为参变数 q？我们将愿意以何者认为这些参变数的导数？这种选择仍有极大的任意性，但只要合乎极小作用原理，以求力学解释之可能就够了。

于是麦克斯韦曾经自问过能否做这种选择，以及 T 与 U 的二能之选择，

使电之现象满足此原理。由实验我们知道电磁场之能可分为二部分，即静电能与动电能。麦氏曾认明如我们把第一认为势能 U，第二认为动能 T；另方面，如静电荷认为参变数 q，而电流强度认为其他参变数 q 的导数；在这情形之下，我就要说，麦氏曾认明电之现象满足极小作用原理。由是一定有一力学的解释之可能。

他如果不把这意思放在第二卷书中偏角的地方而放在第一卷起始之处，则大半的读者便不致忽略它了。

所以如果一现象可有一完全的力学解释，则亦有无穷别的，都也可以解释实验所揭发的特点。

这是被物理学中各部分之历史所证实的；譬如，在光学中，弗氏以为颤动是垂直于偏振平面的；纽满则以为是平行的。好久人们就想一“交叉实验”以决定这两理论孰是孰非，但人们始终未能求得。

同样，即在电学里，那二流体与一流体的二理论也都能满意地说明静电学中观察所得的定律。

利赖了我刚才提起的拉氏方程式的特性，所有这些事实都可容易解释。

现在很易明白麦氏的基本观念了。

为要证明电之力学的解释之可能性，我们不必先去找这解释之本身，我们只要知道 T 与 U 二函数之表式（此乃能之两部分），用这两函数可组成拉氏方程式，并把这方程式和实验的定律相比较。

在这些可能的解释之中，怎样作一种缺乏实验帮助我们的选择？或者有一天物理学家将不理会这些不可用积极的方法解决的问题，而把它们抛给玄学家。这一天尚未到；而人们不是这样容易永不明白忍耐着事物的本质的。

我们的选择只能以个人的观察占主要成分的考虑为向导；但也有些答案是大家弃而不用的，因为太古怪了，也有的是大家爱重的，因为它们是简明的关系。

关于电与磁，麦氏不作任何选择。这不是因为他系统地轻视积极的方法所不能达到的一切东西；我们只看他对于气体运动论所费的时间就可相信了。我还要加说，虽然在他的大著作之中他不开展一点完全的解释，但他在以前曾在哲学杂志的一文中曾试给这种解释。以前他不得已做的假设之奇怪和复杂使他后来又弃而不用它们了。

同样的精神，可在全部书中见到。其中最主要的，亦即各种理论应该公有的，都已阐明；凡只能合乎一种特殊的理论的地方无不默默而过。因此读者面临一种几乎内无实物的形式，这在起初还被他当作不可捉摸和飘忽无定的影子。但他所费了的努力使他过思，而结果他明白了他从前所称赞的整个理论中，总有些人为的地方。

## 第十三章　电动力学

电动力学的历史对于我们的观点特别有益。

安培曾把他的不朽的著作叫做“唯一建立在实验上的电动力学现象之理论”。因此他以为丝毫不曾做有假设；然而不久我们将知他是做了的，只是他做而不自觉罢了。

他的后辈反看得很清楚，因为安培答案的弱点引起了他们的注意。他们做了些新的假设，他们这次却完全自觉的了；但这是经了多少衣数的改变才到了今天恐还未固定的经典系统，这就是我们要去研究的。

（一）安培的理论——当安培试验电流的交互作用时，他只将而且只能对合闭电流试验。

这不是他否认开放电流之可能性。设有二导体负有不同的电荷，如把它们用金属线连接起来，则生出由此到彼的电流，一直等到两者的电位相等后方止。

在安培时代，一般意见以为这是开放电流；因为人们只是看见电流从第一导体流向第二导体，而不见有电流从第二导体流回第一导体。

因此安培就以这种的电流认为开放的，例如蓄电器放电时所生的电流，但他不能用它做试验，因为经过的时间太短了。

人们另可想出一种开放电流。我假定有 A，B 二导体，用 AMB 线接通。起初有些运动的小导体与 B 接触，取得其中一部分的电荷，乃离开 B 的接触，而接着 BNANA 的路线运动，于是从这里带来电荷，来到 A 的接触便放弃这电荷给 A，这电荷就由 ANB 路回到 B。

这里在某种意义上，是一种合闭电路，因为电流循 BNAMB 路而行；但此电流之两部分均极不同。在 AMB 线上，电经过一固定的导体，其情形如寻常伏特电流，遇到欧姆电阻而发热；人们叫它导电移动。在 BNA 部分中，电是由一移动的导体所运输的；人们叫它运输移动。于是，如果把运输电流认为与导电电流完全相同，则 BNAMB 电路是合闭的；反之，如运输电流并非“真正电流”，譬如它对于磁铁是无作用的，那就只剩导电电流 AMB，它是开放的。

例如，用一线联络霍子起电机的两极，其中荷电的旋转板用运输电流法把此极的电运输到彼极，然后再经过此线的导电，回到第一极。

然而这一种的电流极微，要它强度可观是很难实现的。照安培当时所具备的方法，人们可说这是不可能的。

总而言之，安氏可以想像两种开放电流的存在，但这两种都不是他所能利用来试验的，因为它们太弱或历时太短。

所以试验只能告诉他合闭电流对于合闭电流的作用，或严密点说，合闭电流对于一部分电流的作用，因为人们可使电流通过一合闭的电路，其一部分是可动的，一部分是固定的。于是人们可以研究可动的部分受合闭电流的作用而移动的情形。

反之，安培毫无方法研究开放电流对于合闭电流，或对于另一开放电流的作用。

（1）合闭电流之例——安培试验二合闭电流之相互作用时，曾得许多非常简明的定律。

我姑且把与下文有关的定律，简括的说出来。

一、如果电流强度是保持不变的，又如这两电路在受了一种移动与变形之后，仍归原状与原地，则电动力的总功必为零。

换一句话说，其中必有两电路的电动电势，此电势与两电流强度之积成正比例，又依存于电路的形式及其相对的位置；电动作用的功等于此电势的变化；

二、电流经过合闭的螺线管的作用为零；

三、电路 C 对于另一伏特电流的电路 C′的作用，仅依存于这电路 C 所发展的“磁场”。事实上，在空间各点，人们可以规定有一定方向和数量的磁力，此力有下列特性：

（a）C 对于一磁极所作用的力是施在这磁极上的；其量等于磁力乘磁极之磁量；

（b）一根极短的磁针有倾向磁力的趋势，使做这种倾向的偶力与磁力、磁针的磁矩及其偏转角之正弦成正比例；

（c）如果电路 C′移动时，则 C 对于 C′所生电动作用的功等于穿过此电路的“磁力通量”的增量。

（2)合闭电流对于一段电流之作用——安培既未能实现一种真正的开放电流，所以只好去研究合闭电流对于一段电流的作用。

其法即用电路 C’作实验，此电路分固定与可动的两部分。可动的一部分譬如是一条可动的线αβ，其两端α与β可在一固定线上移动。在可动线的两位置之一，α端是停在固定线的 A 点上，而β端则停在固定线的β点上。电流由α到β，即先在可动线上由 A 至 B，再在固定线上由 B 至 A。故此电流为合闭的。

在第二位置时，可动线既经移动，则其α端移到固定线上的 A′点，β端移到固定线上的 B′点。于是电流由α流到β即先沿可动线由 A′至 B′，然后沿固定线由 B′回到 B，再由 B 到 A，最后由 A 到 A′一路总是沿着固定线。故电流仍是合闭的。

如果这样的电路受合闭电流 C 的作用，则其可动的部分好像受外力而移动。安培承认这可动的部分 AB 好像受到的表观力量，既代表着 C 对于部分电流αβ的作用，又与假定通过αβ的电流是开放的所受的力量相同，这时电流将停在α与β非如合闭电流，在到了β以后，仍沿电流的固定部分回到α。

这个假设似乎是很自然的，而安培做的时候并不自觉；但它并不是强迫的，因为稍迟就可知道亥尔莫慈要抛弃它。然而无论如何安培虽未能实现开放电流，但这假设能使安培发现许多合闭电流对于开放电流的作用或对于一极小部分的电流的作用的定律。

这些定律还是很简明的：

一、对于极小部分的电流的力是施在这上面的；此力与电流和磁力成直角，且与垂直于电流之磁力分量成正比例：

二、一自闭的螺线管对于极小部分的电流毫无作用。

但这里再也没有电动电势了，就是说：保持常定强度的开放电流与关团电流归还原地时，总功不等于零。

(3)连续的旋转——在电动力学中最有趣的实验是能实行一种连续旋转的实验，有时人们称这种实验为单极感应。一磁针可绕其轴而转，一电流起初通过一固定线，进入磁针的北极 N，经过磁针之半段，再由一可滑移的接触点流出。而进入固定的线。

于是磁针旋转不已，永不能达到平衡的位置。这是法拉第试验。但这是怎样一回事？如果这是二种定形的电路，一是固定的 C，一是可绕轴而转的 C′，则这后者之旋转，永不会连续的。其实，这里有电动势存在，故必有一平衡的位置，这将是电势极大之处。

所以连续的旋转，除非 C′包含两部分方才有可能：其一是固定的，其二是可绕轴而动的，有如法拉第的试验。不过还要有一个区别，即由固定的部分来到可动的部分，或反之，都是可能的，或用简单的接触法（固定的部分的同一点与可动的部分的同一点永相接触），或用可滑动的接触（可动的部分之同一点依次与固定的部分之各点相接触）。

那种连续的旋转仅在第二情形中才有可能。在那时候，系统渐趋于平衡，但是，当它将达到这点时，那滑动的接触物能使转动部分与固定部分的一新点交通；它更换着联络，所以它也更换各种平衡的条件，因此，可说系统总追不到它所要赶上的平衡位置，而那旋转现象就可无穷地持续下去。

安培承认电路对于 C′的可动部分的作用,即等于 C′之固定的部分不存在时那样，因此亦即等于流通于可动部分的电流为开放时那样。

所以他结论合闭电流对于开放电流之作用，或反之开放电流对于合闭电流之作用，可生连续的旋转运动。

然而这种结论依存于我刚才所说的假设，并且未经亥尔莫慈所承认，这是我在上面已经说过的了。

(4) 二开放电流的相互作用——关于二开放电流的相互作用，尤其是关于二极小部分电流的相互作用，无论什么试验都不行。安培曾求助于假设。他假定：第一，二极小部分的电流之相互作用可缩为在二者相联之直线上之一力；第二，二极小部分合闭电流之相互作用是这些极小部分之总合作用，而这些作用有加在各部分是孤立时所发生的。

最可注意的，即在此地安培又作了这两个假设，而自己还不知道。

虽然，把这两种假设与关于合闭电流之试验综合起来，足以完全确定二极小部分之相互作用。

但是这样，那我们在合闭电流的情形中所遇着的简单定律大多数又是不

真实了。

第一，是没有电动势；而我们已知在合闭电流对于开放电流发生作用时，亦无此种电势。

其次，真正说起来，是没有磁力的。

其实关于这个力之定义，我们在上文已给了三种：

一、磁极所受之力；

二、旋转磁针之偶力；

三、一极小部分电流所受之力。

但是，在我们现在所讨论的情形中不但这三种定义不再相互符合，并且每一种都是毫无意义的，而事实上：

一、一磁极所受之力不仅限于一种施于此极的力。其实，我们已知一极小部分电流对于磁极之作用，并非施于极点，乃是施于此小部分上的；这个作用本可用一偶力与一施在磁极上的力代替。

二、这对于磁针所生的偶力不仅是定向的偶力；因为它对于针轴之力矩并非零。此力可分为一真正定向的偶力，与一补充偶力，此最后力足以促起磁针之连续的旋转，这是我在上文已说过的。

三、最后，极小部分电流所受之力并不垂直于此部分。

换言之，磁力之统一性已消减了。

且看这统一性是怎样一回事。如两系统对于一磁极发生同一的作用，则对于一无穷小的磁针亦有同一的作用对于放在以前磁极所占之位置的极小的部分电流亦然。那么，倘若这两系统仅含合闭电流，这就对了；依照安培的道理，如这两系统所含的是开放电流，这就不对了。

人们只要注意，譬如一磁极是放在 A 点，又有一极小的部分电流是放在 B 点，而这部分之方向既是在 AB 引长线上，则此部分对于磁极是毫无作用，然对于放在 A 点之磁针或放在 A 点之极小部分电流，则有作用。

(5)感应——人们知道自从安培不朽的著作发表之后随即有电动感应之发现。

这个现象只要是由于合闭电流而生，则毫无困难，并且亥尔莫慈曾注意到，只须根据能之守恒定律，已足把那些感应的定律由安培的电动定律推引而出。不过还有一个条件，就是要另外承认许多假设，白德安先生曾将此层示明。

关于开放电流，亦可用同一原则，求得此种推论，虽然人们当然不能将所得的结果证之以实验，因为人们不能实现这种的电流。

人们如将此种分析方法应用在安培的开放电流的理论上，可得许多令人奇异的极好结果。

第一，感应现象是不能用学者与实验家的著名的公式由磁场变动现象推引而出，而且其实我们上文已说过，真正讲起来，已经没有磁场了。

但是另有一件事情。今有一电路 C 受可变的伏特系统 S 之感应；如此 S

系统自己行动并任意变形，此系统之电流按任何定律变动，但变动之后，仍回复原位，那自然要假定平均的感应电动势在电路 C 中为零。

如果这 C 电路是合闭的，且 S 系统仅有合闭电流，那么这就真实了。当有一开放电流时，如果人们承认安培的理论，那就不真了。所以，就这字的任何普通意义而言，感应不但将不是磁通量之变动现象，且亦将不能用任何物之变动来表示。

（二）亥尔莫慈之理论——关于安培理论之后果和他怎样解释开放电流，我已申述了一番。

对于那些人们推出来的命题之荒谬与人为实在是不难察知的；因此人们想“一定不是那样”。

由此人们可以想像亥尔莫慈另走别路的动机了。

亥氏不用安培的根本假设，这个假设即两微小部分电流之相互作用可并成一力，此力在两者相联之直线上。

他承认一微小部分电流不仅受一个力，且有一偶力。正为了这一点，才发生亥氏与白氏之有名的笔墨官司。

亥氏把安培的假设代以下面的假设：二微小部分电流总可有一电动势，此电势仅依存于其位置和方向，而两者相互施加的力之功等于此电势的变量。所以亥氏也和安培一样，是不能不做假设的；不过，至少他非明白地说明才不做。

在那唯独可实验的合闭电流的情形中，这两种理论是相合的，在其他的情形中就有区别了。

第一，合闭电流的可动部分所受之力与将此部当作孤立的且认为开放电流时所受之力不同，这同安培的假定的适相反。

现在我们再把上面的 C′电路来谈罢，此路原是由αβ可动线滑动在固定线上而成；在唯一可以实行的试验中，αβ线为是孤立的，而是合闭电路的一部分。当它从 AB 移到 A′B′时，电动势之变动可分为二因：一、因为 A′B′对于 C 的电势有异于 AB 对于 C 的电势，故此电势受了第一种增量；二、因为此外还要加上 AB 与 A′B′各个对于 C 的电势，故此电位受了第二种增量。

AB 部分所受之力的功，即此种双重的增量。

反之，如αβ为孤立的，则电势只受第一种增量，而仅是这第一种增量代表 AB 所受力之功。

第二，如果没有滑动接触，则无连续旋转之可能；事实上，这是由电动势之存在而得的后果，我们在谈合闭电流时已说过了。

在法拉第试验中，如果磁铁不动，且如磁铁外之电流通过可动线，则此可动线将旋转不已。但这不是说如果将磁铁与线分离后，而将开放电流通过线时，此线仍将旋转不已。

由此可见一孤立的微小的部分电流所受力与属于合闭电路的可动的部

分所受力不同。

此外还有区别：按照实验与那两种理论，凡一合闭的螺线管对于合闭电流之作用为零；它对于开放电流的作用，根据安培为零，根据亥氏为非零。

由是乃得一重要之后果。我们在上文讲过三种磁力之定义；策三种在此毫无意义，因为一微小部分电流不再受着唯一力。第一种亦无意义。事实上，何为磁极？这是一无穷长的线形磁铁的极端。此磁铁可代以无限长的螺线管。故欲磁力的定义有意义，则开放电流对于无限长的螺线管的作用，须仅依存其极端之位置，就是说对于合闭的螺线管的作用为零。但是我们刚才已知道，这不是真的。

反之，我们尽可采取第二种定义，它是建立在那定向偶力之测量，此力引起磁针之转动。

但是，倘若人们采用这种定义，那么感应作用与电动效应都将不仅依存于此磁场之力线的分布了。

（三）这些理论所引起的困难——亥氏的理论比安培的理论可算进一步了；但要所有的难题都能解决才好。在这两家的理论中，磁场这个字都是无意义的，假使我们用一种多少人为的公约给它一个意义，则那些电学家所熟悉的定律就不能再适用；因此在一线中的感应电动力，不能再以所穿过此线的磁力线之数来计量。

而我们厌弃的心理不但来自我们在思想上与言语上所深染的习惯。此外还有别的原因。我们如果不信超距作用，那么解释电动现象时必借用媒质的变化。而这种变化正就是所谓磁场，于是关于电动的效应，只能依存于这种场。

所有这些困难都是来自开放电流之假设。

（四）麦克斯韦的理论——这些困难一待麦克斯韦来到后就一笔勾消。在他看起来只有合闭电流。

麦氏承认如果在介电体中电场变动时，介电体中就发生特殊现象，它对于电流针的作用与普通电流无异，麦氏叫它位移电流。

于是如有一线联接两个负有相反的电荷的导体，则在放电时，线中必发生一种开放导电；但同时在临近的介电体中，发生一种位移电流，以关闭这导电。

人们知道麦氏理论可用以解释光学现象，以为它是来于极速的电振动。

在当时，这种观念只是一种大胆的假设，而毫无实验根据的。

20 年后，麦氏的观念才得到实验的证实。赫慈竟能实现电之颤动系统，表演了所有光的特性，它与光的不同点，只在于波长，就是说有如红色有别于紫色。他所做的差不多是光之综合。大家都知道无线电学就是从此发源的。

我们可说赫慈并未直接证明麦氏的基本观念，即位移电流对于电流针的作用。在一方面，这是不错的，总之他所直接指明的，就是电磁的感应现象之传播速度不像人们以前相信是无穷大的，而是等于光速。

不过，今如假定位移电流不存在，而感应传播速度等于光速，又或假定位移电流发生感应效应，且感应之播速为无穷大，这都是一样的。

这个道理人们在起初是看不见的，但可用分析法以证明，可是我不能在此概述。

（五）何浪实验——但是我上面已经说过有两种开放导电：第一就是蓄电器，或某导体放电时所发生的电流。

其他情形有如电荷通过一自闭的导圈，它移动时，在电路的一部分为传导的，在另一部分为运输的。

关于第一种的开放电流，问题可算解决：因位移电流把开放电流关闭。

至于第二种的开放电流，其答案似乎更简便；倘若电流是合闭的，则这也似乎只有被运输电流的本身关闭。为此，只须承认“运输电流”即在移动中的荷电导体，可以作用着电流计。

但过去尚少经验的证实。事实上，即使尽量加增导体的电荷与速度，仍似难于得到足够强的电流。

这是何浪极能干的实验家首先战胜了这些困难。其法用圆盘收集了极大的电荷并具有极大的转速。旁边有一个无定向的磁系统就受到影响而偏转。

何浪曾做过两次试验，第一次在柏林，第二次在巴尔地摩；其后又有希姆斯得脱继续试验。这两位物理学家竟声称他们曾做定量的测定。

何浪这条定律曾被所有物理学家所承认而无异议。

而且好像一切都证实这条定律。电花当然发生一种磁的效应；但是，电花放电岂不像是从某电极上拨下的荷电粒子而转运到另一电极所成吗？试看电花的光谱，可见其中有电极的金属体的谱线，这不是证据吗？然则电花是真正的运输电流了。

另方面，人们也承认在电解液中，电流乃是被离子所运送。所以这液体中的电也必定是运输电流；但是，它对于磁针发生作用。

阴极射钱亦复如是，克洛克斯说这是一种微妙的含有负电荷的物质，且有极大的速度；换言之，他以为这是运输电流，他的这种见解虽经一时的反驳，然如今已处处被采用了。但是，这些射线可被磁铁所偏转。根据主反作用的原理，这些射线亦当偏转磁针。

不错，赫慈曾相信证明了这些阴极射线不能运送负电，且对于磁针毫无作用。但他是错了；第一白汉曾收集了这种射线所荷的负电，这是赫慈认为不存在的。这位德国学者之错误似乎由于 X 光线之效应，而这在当时尚未发现。其次，最近已有人发见阴极射线对于磁针的作用，并且看清赫慈的错误所在了。

这样，电花，电解液中之电，隐极射线，这些现象都被认为运输电流，对于电流针都有同样的作用，且合乎何浪定律。

（六）罗伦慈理论——不久人们又有更进一步的理论。根据罗伦慈的理论就连导电电流也是一种运输电流：他以为电是永久不可分解地寄托在一种

小物质的粒子上的，名曰电子；伏特电流即是这些电子通过物体时所生，而导体与绝缘体之区别便在于一种能让这些电子通过，另一种则能阻止它运行。

罗氏的理论是很引动人的，它能简单地解释旧式理论和甚至麦氏的原始理论也未能完满解决的一些现象，例如光的行差现象光波的部分的牵动，磁偏振现象和齐门现象。

有些反驳还是存在着。在某系统中所生的现象似与其重心的绝对速度有关，这是与我们对于空间相对性的观念相反的。对克雷门先生的论见，立普曼先生曾把这种反驳明显地陈述出来。设有二荷电导体，并具有同一的移动速度。它们是相对地静止；然而它们的每一个等价于一运输电流，它们当相互吸引，而人们如测量此吸力，就可测得它们的绝对速度。

罗伦慈一派人回答说，不然；人们这样测量的，不是绝对的速度，乃是对于以太的相对速度，因此相对论仍是保持着。其实从此罗氏又等到一种更为微妙的，但更使人满意的回答。

无论这些最后的反驳如何，电动力学的大部至少在主要方面是完全成立了；一切都呈现一种使人满意的现象；至于安培与亥尔莫慈的理论原是为开放电流而做的，到现在这种电流已不再存在，所以这些理论也只有历史价值了。

但是这些变迁的历史，对我们未尝无益；我们借此可以知道学者是如何易受欺骗并且要怎样才有逃避它的希望。

## 第十四章　物质的究竟

近年来物理学家宣称的最惊人的发现，是即物质不存在。我们要赶快说这个发现还不是最后的。物质的最主要的特征，就是它的质量和惯性。这质量是到处永久不变的，尽管化学的转变改变了物质的一切可感的特性而似乎变成完全不同的东西，但质量终是不变的。所以如有人证明物质的质量与惰性实在不是属于物质的，而以为这不过是它的一种装饰，甚至那最是永恒的质量也是可以改变的，那么人们就可说，物质是不存在的。而人们所宣称的，正就是这一点。

我们至今所能观察的速度都是很微弱的，因为那些使我们所有的汽车望尘莫及的天体，其速度在每秒中亦不过 60 或 100 仟米；不错，那光的速度是较大 3 千倍，但这不是物质在移动，这是经过相对的不动质体时的摆动现象，有如洋面上的波浪。凡是在这些小速度的现象中作观察时，物质都指出质量是不变的，但从没有人问过在较大的速度时，也是如此否？

倒是这些无穷小的东西反打破最快的行星，即水星的纪录，我是说那些在阴极射线与镭射线中运动的微粒。人们知道这些射线真是来自分子轰击。由此而射出的微粒都荷有负电，这是人们可用法拉第筒收集而证实的。因为

---

[1] 参阅黎朋著：物质的进化（L’évolution de la matière，Gustave LeBon）。

它们有了电荷，所以要受磁场或电场的偏转，而由这些偏转的比较，我们乃知其速度及其电荷与质量之比。

但是，由这些测量我们可以知道它们的速度是极大的，其速度约为光速十分之一，或三分之一，比星球要快千倍；而另方面，它们的电荷比较它们的质量是非常之大的。所以每一行动中的微粒可代表一种可观的电流。但是我们知道电流有一种特殊的惯性，叫做自感现象。一电流发生后总是有一种保持不变的倾向，故当人们断绝电路以阻其通行时，乃见在断路点发生电花。由此可知电流极力保持其强度，正如一行动中的物体总有保持其速度的倾向。所以阴极射线中的微粒也能抵抗变更其速度之原因，这里有两种理由：第一，由于它的真正惯性；第二，由于它的自感现象。因为速度变更时，同时即有电流变更。故微粒——即所谓电子——当有两种惯性：力学的惯性和电磁的惯性。

阿陌海姆先生与高夫芒先生，一位是计算家，一位是实验家，曾协力做这两惯性的研究。因此他们不得不承认一种假设；他俩想所有负电子都是一样的，它们有同一的电荷，必然是不变的，我们所察觉它们的不同仅是由于那些它们运动的速度。当速度变更时，真正的质量，即力学的质量不变，这可说原是它的定义；但是有助于表观质量的电磁惯性，则随其速度按某定律而增加。所以在速度与电荷对质量之比的两者之间必有一关系式，而我们刚才说过，这些数量都可由光线经过磁场或电场时所受之偏转计算而得；此关系的研究就可确定这二种惯性的分量。这结果真是可惊：真正的质量等于零。这自然应该承认起初的假设，但是理论上的曲线与实验上所得的曲线的符合程度相当大，以致这个假设是很可能的。

所以这些负电子没有真正的质量；它们所以似乎具有惯往，是在它们变动速度时必扰乱以太。它的表观惯性只是一种租借品，不是属于它们的，乃是属于以太的。但是这些负电子不全是物质；所以人们可能承认在它们之外还有真正的物质，具有真正的惯性。有些射线——有如哥儿斯坦孔道射线，镭之α射线——也是一些弹子，不过这些弹子荷的是正电，这些正电子也是没有质量的吗？这是不能说的，因为它们比较负电子重的多和慢的多。于是有二种假设可以承认；或者电子较重之故，在除了它们所借来的电磁惯性之外，它们本身有力学的惯性，于是这就是它们才是真正的物质；或者它们也同别的一样没有质量，其所以似乎较重者，是因它们较小。我说比较小，虽然这种说法似乎荒谬；但因为在这种观念中，那微粒将不过是以太中的真空，唯独它是实在的，唯独它具有惯性。

迄今物质还是没有太连累着，我们还可采取第一种假设，甚或相信除了正的和负的电子之外尚有中性的原子。但据罗伦兹最近的研究，我们就要失去这后面的援助。地球很快的在以太中移动时，我们也在被牵动之中；光的或电的现象不会受了这种移动而变更吗？人们相信了好久，且曾经假设，随仪器对于地球运动的方向之不同观察就会有不同的结果。其实不然，且最精

密的测量也未曾得过这样的结果。这里实验证实了物理学家的一种共同的厌恶；事实上，人们如果找到了一点东西，则人们不但将知道地球对于太阳的相对运动，且将知它在以太中的绝对运动。但是有许多人很难相信任何试验所得的结果，除了相对运动之外，就没有其他，他们倒很愿意承认物质是没有质量的。

所以人们对于所得负的结果并不曾十分惊异。这些结果是与传授的理论相反，但它们能满足于在这些理论以前的一种深刻的本能。并且还要把这些理论，根据其后果而加以修改，以求合乎事实。这就是费则格好得用一可惊的假设做过的：他承认无论何物，如顺地球运动的方向而运动时，必缩短十万万分之一。圆球必变成扁椭圆球，且令其转动时，其变形必使小轴平行于地球之速度。因为测量的仪器所受的变形与被测量的物件相同，故人们一点也不发觉什么，除非人们不留意去确定光线经过物件的长度之时间。

这个假设可以说明观察得来的事实。然而这还不够。有一天人们还可作更精密的观察；那时可得正的结果吗？这些观察可以使我们测定地球的绝对运动吗？罗氏并没有这样想。他相信这种测定永是不可能的；许多物理家的共同的本能，以及至今各种实验所遭失败，都足保证他的想法。所以我们可以承认这个不可能是自然界的普遍定律；并且承认这是一种公设。然则其后果将如何？这正是罗伦慈所寻求的，他发现所有原子，所有正电子或负电子都有一种惯性，而与其速度都依同一定律变更。这样所有物质的原子都是小而重的正电子与大而轻的负电子所成，至于那可感觉的物质对于我们不像荷电，是因为这两种的电子的数目是几乎相等之故。两者都是没有质量的，而只有假借的惯性。在这系统中没有真正的物质，而只有在以太中的孔洞。

照郎之万先生的意思，物质也许是液化的以太，并已丧失他所有的特性了；当物质移动时，这并不是这种液化的质体在以太中移动，乃是液化向以太各部分逐渐扩充的，同时在后方已变成液体的部分又渐行恢复原状。物质在运动中不保持其原形。

这就是近来对于此题研究的梗概；但现在高夫芒先生又发表了新的试验。速度极大的负电子，必受弗则格好得的缩小，因此速度与质量之关系亦变；但最近试验不能证实这种预见；然则一切都要倒了，而物质又将得生存的权力。但这些实验是不容易的，在今日要想做一个最后的结论，还是太早了。